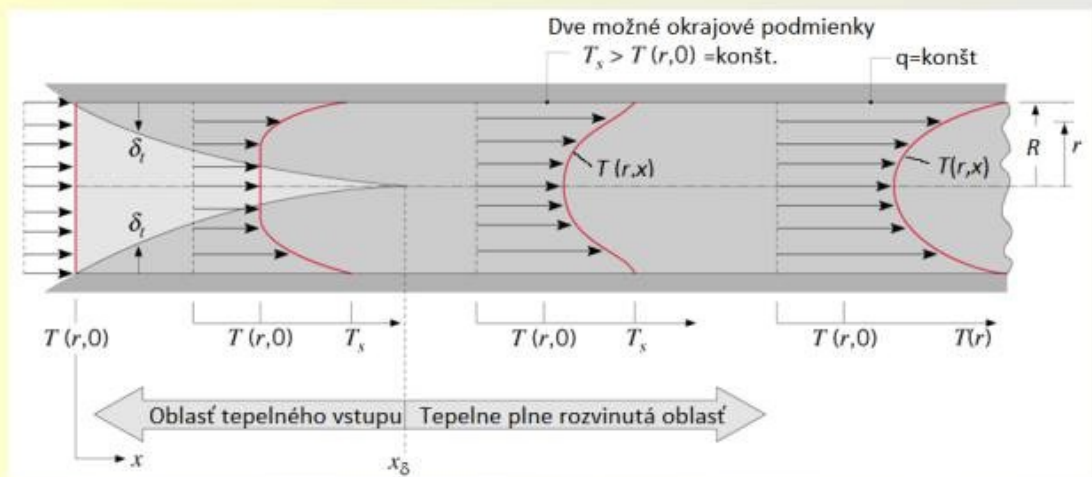
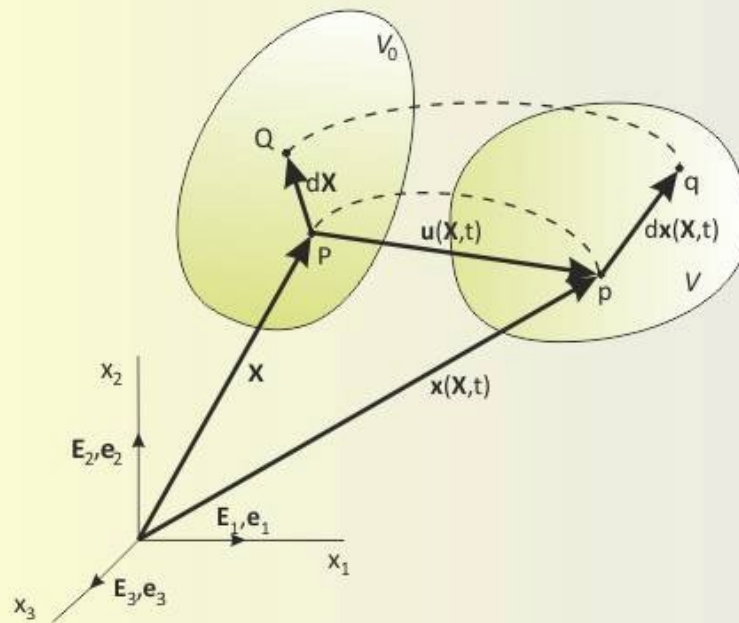


doc. Ing. Štefan Benča, PhD.

APLIKOVANÁ NELINEÁRNA MECHANIKA KONTINUA



Všetky práva vyhradené. Nijaká časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autora.

© Doc. Ing. Štefan Benča, PhD.
Aplikovaná nelineárna mechanika kontinua
E-kniha formát PDF
Vlastné vydanie, Bratislava, 2018

OBSAH

1	Vzťahy medzi posunutím a deformáciou. Geometrické rovnice	10
1.1	Malé deformácie	10
1.2	Veľké deformácie	13
2	Matice nelineárneho prútového prvku (veľké posunutia, veľké rotácie, malé deformácie)17	
2.1	Vektor vnútorných uzlových síl prvku	17
2.2	Tangenciálna matica tuhosti prvku	20
2.3	Totálna a aktualizovaná Lagrangeovská formulácia	20
2.3.1	Riešenie nelineárnej prútovej sústavy pomocou totálnej Lagrangeovskej formulácie	21
2.3.2	Výpočet prútovej sústavy v programovom prostredí Mathematica 5.....	22
3	Napätie. Diferenciálne rovnice rovnováhy. Princíp virtuálnych posunutí.....	28
3.1	Napätie	28
3.2	Transformácia napätia na pravouhlé roviny diferenciálneho elementu	29
3.3	Vyjadrenie všeobecného napätia v jeho rovine pomocou zložiek.....	30
3.4	Analýza napätia v bode telesa	30
3.5	Diferenciálne rovnice rovnováhy	31
3.6	Princíp virtuálnych posunutí	32
4	Kinematika konečných (veľkých) deformácií	35
4.1	Pohyb telesa. Materiálové a priestorové súradnice	35
4.2	Deformačný gradient. Natiahnutie (stretch)	37
4.3	Miery deformácie.....	38
4.4	Polárny rozklad deformačného gradientu	43
4.5	Zmena objemu	46
4.6	Zmena plochy	48
4.7	Miery rýchlosti deformácie	49
4.8	Fyzikálna interpretácia tenzora rýchlosti deformácie	52
5	Alternatívne miery napätia	54
6	Totálna Lagrangeovská formulácia	57
7	Lagrangeovská formulácia geometricky nelineárneho prvku rovinnej napätosti	61
8	Určenie matíc prvku priamo z diferenciálnych rovníc úlohy	73
8.1	Princíp Galerkinovej metódy.....	73
8.2	Slabá forma diferenciálnej rovnice	74
8.3	Určenie matíc prvku	74

8.4	Príklad na ilustráciu postupu.....	76
8.5	Nelineárna diferenciálna rovnica	78
8.5.1	Určenie matíc prvku	79
8.6	Jednorozmerný nelineárny prenos tepla vedením a prúdením	80
8.7	Príklad na nelineárne vedenie tepla	82
8.7.1	Zadanie a exaktné riešenie.....	82
8.7.2	Zostavenie aproximačných rovníc MKP	82
8.8	Princíp Newton-Raphsonovej metódy a výpočet príkladu	83
9	Doskové konečné prvky	87
9.1	1. Základné pojmy	87
9.2	Kinematické rovnice Kirchhoffovho a von Kármánovho modelu dosky	88
9.3	Teória Kirchhoffovej dosky zaťaženej len v priečnom smere	89
9.4	Určenie matíc prvku Kirchhoffovej dosky zaťaženej len v priečnom smere.....	92
9.5	Pravouhlý štvoruzlový prvok Kirchhoffovej dosky	94
9.6	Príklad - štvorcová voľne podopretá doska zaťažená konštantným tlakom.....	95
9.7	Nelineárny prvok von Kármánovej dosky	98
9.8	Príklad - Štvorcová na obvode tuho votknutá nelineárna doska zaťažená tlakom .	102
9.9	Koncept Mindlin - Reissnerovej dosky	106
9.10	Nelineárny prvok Mindlin-Reissnerovej dosky	107
9.11	Príklad - Pravouhlý štvoruzlový nelineárny prvok Mindlin-Reissnerovej dosky	111
10	Konštitutívne rovnice hyperelastického materiálu.....	115
11	Pružne-plastické úlohy s malými deformáciami	126
11.1	Jednoosový pružne-plastický materiálový model.....	126
11.2	Funkcia plasticity a kritérium plasticity.....	129
11.3	Zákon plastického tečenia. Podmienky plastického zaťaženia a elastického odľahčenia. Spevňovanie materiálu	129
11.4	Podmienka konzistencie. Určenie plastického násobku.....	130
11.5	Všeobecný pružne-plastický konštitutívny model	131
11.6	Kritérium plasticity, plastický potenciál, zákon plastického tečenia a zákon spevňovania	132
11.7	Všeobecná termodynamická formulácia spevňovacích funkcií.....	133
11.8	Určenie plastického násobku a pružne-plastického tangenciálneho modulu.....	133
11.9	Napätové invarianty.....	135
12	Von Misesov materiálový model s izotropným spevňovaním.....	137
12.1	Kritérium plasticity	137
12.2	Zákon plastického tečenia.....	140

12.3	Spevňovanie materiálu	141
12.4	Prírastkové diferenciálne konštitutívne rovnice a pružne-plastický materiálový modul 143	
13	Numerická integrácia konštitutívnych rovníc	146
13.1	Prírastkové riešenie pružne-plastickej úlohy	146
13.2	Numerická integrácia metódou elastický prediktor-plastický korektor	147
13.3	Numerická integrácia nelineárnych rovníc von Misesovho materiáloého modelu.	149
14	Pružne-plastická úloha rovinnej napätosti	161
14.1	Rovinná napätosť pri elastickom zaťažovaní	161
14.2	Von Misesov pružne-plastický model rovinnej napätosti.....	162
14.3	Určenie napätia metódou elastický prediktor/projekcia na najbližší bod.....	163
14.4	Maticová formulácia pružne-plastických rovníc rovinnej napätosti.....	168
14.5	Rovnice návratu napäťového bodu na čiaru plasticity (plastický korektor)	170
14.6	Určenie plastického násobku z podmienky konzistencie	170
14.7	Výpočet plastického násobku pomocou Newton-Raphsonovej metódy.....	172
14.8	Spracovanie maticových vzťahov v jazyku FORTRAN	172
14.9	Konzistentný tangenciálny materiálový modul.....	175
14.10	Určenie konzistentného materiálového modelu v jazyku FORTRAN.....	177
15	Viskoelasticita	180
15.1	Jednorozmerné viskoelastické modely	182
15.2	Jednorozmerný model zaťažený časovo premenlivým zaťažením	191
15.3	Viacrozmerná viskoelasticita.....	193
15.4	Vplyv teploty	197
16	Viskoplasticita	203
16.1	Integračný algoritmus von Misesovho viskoplastického modelu.....	207
16.2	Krípové modely bez plochy plastického tečenia	213
17	Prenos tepla	217
17.1	Tri spôsoby prenosu tepla.....	217
17.2	Základné vzťahy.....	217
17.3	Rovnica vedenia tepla	219
17.4	Príklad jednorozmerného prenosu tepla.....	221
17.5	Numerické metódy riešenia úloh vedenia tepla.....	224
17.5.1	Ritzova metóda	224
17.5.2	Variačná metóda (Rayleigh-Ritzova metóda).....	225
17.5.3	Metódy vážených zvyškov.....	227

17.5.4	Kolokačná metóda.....	228
17.5.5	Metóda najmenších štvorcov.....	229
17.5.6	Galerkinova metóda.....	230
17.6	Silné a slabé riešenie úlohy okrajových hodnôt.....	230
17.7	Riešenie jednorozmernej úlohy pomocou MKP.....	232
17.8	Riešenie príkladu pomocou programu ANSYS.....	238
17.9	Priestorové teleso.....	241
17.9.1	Geometrická diskretizácia úlohy. Matice prvku a telesa.....	243
18	Prenos tepla radiáciou.....	247
18.1	Základné pojmy.....	247
18.2	Konfiguračné faktory plôch.....	250
18.3	Výpočet prenosu tepla radiáciou v programe ANSYS.....	253
19	Skupenské fázové premeny - topenie (tavenie) a tuhnutie.....	259
19.1	Základné pojmy.....	259
19.2	Formulácia úlohy.....	261
19.3	Entalpická metóda riešenia úloh topenia a tuhnutia.....	262
20	Dynamika tekutín.....	269
20.1	Základné pojmy.....	269
20.2	Lagrangeov a Eulerov popis prúdenia tekutín.....	271
20.3	Materiálová derivácia v Eulerovej formulácii.....	272
20.4	Prúdnice a trajektórie.....	273
20.5	Zákon zachovania hmotnosti - rovnica kontinuity.....	278
20.6	Zákon zachovania hybnosti - pohybová rovnica.....	279
20.7	Konštitutívne vzťahy pre tekutiny newtonovského typu.....	282
20.8	Zákon zachovania energie - rovnica energie.....	286
20.9	Začiatočné a okrajové podmienky.....	288
21	Turbulencia.....	292
21.1	Turbulentné prúdenie a jeho modelovanie.....	292
21.2	RANS rovnice a Reynoldsove napätia.....	295
21.3	Boussinesqova hypotéza.....	296
21.4	Modelovanie prúdenia v blízkosti steny.....	297
21.5	Vplyv drsnosti steny.....	302
21.6	Štandardný $k-\epsilon$ model a jeho modifikácie.....	310
21.7	Určovanie vstupných parametrov turbulentného prúdenia.....	311
21.8	Riešenie úlohy pomocou programu <i>Ansys Fluent</i>	314

21.8.1	Geometria oblasti.....	314
21.8.2	Tvorba siete a klasifikácia jej okrajov.....	317
21.8.3	Zadanie úlohy vo Fluente	319
21.8.4	Analýza výsledkov (Fluent postprocessor).....	321
22	Prenos tepla konvekciou (prúdením).....	324
22.1	Tepelná medzná vrstva	325
22.2	Nusseltovo číslo	326
22.3	Prandtlovo číslo.....	326
22.4	Prestup tepla konvekciou v kruhovom potrubí – všeobecne platné vzťahy	328
22.4.1	Stredná (priemerná) teplota T_m	330
22.4.2	Konštantný tepelný tok	331
22.4.3	Konštantná teplota steny	332
22.5	Teplotný profil a koeficient h pri laminárnom prúdení v potrubí – analytické riešenie 335	
22.5.1	Konštantný tepelný tok	336
22.5.2	Konštantná teplota steny	337
22.6	Niektoré korelačné vzťahy – laminárne a turbulentné prúdenie v potrubí	338
22.7	Riešenie úlohy pomocou programu <i>Ansys Fluent</i>	342
22.7.1	Geometria oblasti.....	342
22.7.2	Tvorba siete a klasifikácia jej okrajov.....	343
22.7.3	Zadanie úlohy vo Fluente	345
22.7.4	Analýza výsledkov (Fluent + CFD-Post)	347
23	Analýza zviazaných fyzikálnych polí.....	350
23.1	Úvod a základné pojmy	350
23.2	Mechanicko-tepelná väzba	352
23.2.1	Termoelasticita.....	356
23.2.2	Termoplasticita.....	363
23.3	Väzba fluidného a mechanického poľa	363
23.3.1	Riešenie jednosmerne zviazanej úlohy pomocou fyzikálnych modelov (Physics) 364	
23.3.2	Riešenie obojsmerne zviazanej úlohy pomocou fyzikálnych modelov (Physics) ..	369
24	Elektromagnetické pole	379
24.1	Úvod a základné pojmy	379
24.2	Elektrické pole.....	380
24.3	Stacionárne magnetické pole.....	390
24.4	Magnetické pole v okolí prúdovodičov a cievok.....	393

24.5	Elektromagnet a jeho silové účinky	401
24.6	Obvod s permanentným magnetom.....	409
25	Kontakt telies	416
25.1	Úvod	416
25.2	Základné pojmy	417
25.3	Metódy riešenia	418
25.3.1	Metóda Lagrangeových multiplikátorov	419
25.3.2	Pokutová metóda	421
25.3.3	Rozšírená Lagrangeova metóda	422
25.3.4	Kontakt s trením	424
25.4	Problematika formulácie a riešenia všeobecnej kontaktnej úlohy pomocou MKP.	426
25.4.1	Podmienky kontaktu	427
25.4.2	Formulácia kontaktnej úlohy.....	430
26	Výpočtové postupy MKP v akustike.....	434
26.1	Niektoré základné pojmy z akustiky.....	434
26.2	Vlnové rovnice.....	436
26.3	Riešenie jednorozmernej vlnovej rovnice.....	439
26.4	Princíp tvorby základných matíc konečného akustického prvku.....	442
26.5	Modálna analýza	445
26.6	Harmonická analýza	448
26.7	Interakcia zvuku a konštrukcie.....	451
27	Bibliografia	452

ÚVOD

Vybrané kapitoly mechaniky kontinua uvedené v tejto práci vznikali v rokoch 2009 až 2017 ako rozširujúce doplnky monografií [1] a [2] na internetovej stránke mkp-fem.sk. Boli tvorené ako samostatné časti najprv z oblasti geometricky a fyzikálne nelineárnych úloh telesa z poddajného materiálu potom z oblasti prúdenia tekutín, z prenosu tepla, elektro-magnetizmu, kontaktu telies a akustiky. Nakoľko sa vo všetkých týchto prípadoch vyšetruje spojité kontinuum metódami mechaniky kontinua [3], dochádzalo pri náraste počtu kapitol buď k opakovaniu metód, vzťahov i rovníc, alebo k potrebe častého odvolávania sa na predchádzajúce časti. Nakoniec z tohto vyplynula potreba spojiť tento materiál do jedného celku a sprístupniť ho záujemcom tým najjednoduchším spôsobom – vo forme e-knihy.

Lineárne úlohy mechaniky možno pomocou komerčných výpočtových softvérov (univerzálnych programových systémov) skoro rutinne riešiť s minimálnym a, žiaľ, často i podceňovaným nárokom na teoretickú pripravenosť užívateľa; pri nelineárnych úlohách je to ťažko mysliteľné. Už len samotné zadávanie vstupných dát (typ materiálu, okrajové podmienky, konvergenčné kritériá, voľba vhodného výpočtového modelu a i.) ako aj schopnosť odhadu dôveryhodnosti vypočítaných výsledkov vyžaduje dôkladnú teoretickú i praktickú prípravu.

Tak ako je to zdôraznené v názve, kniha je určená aj pre aplikačne založeného záujemcu a väčšina jej častí ilustruje teóriu príkladmi alebo využíva softvérové prostriedky na riešenie jednoduchých vzorových nelineárnych úloh. Postupy a využívanie softvéru pre analogické reálne úlohy je potom už obyčajne len otázka väčšej prácnosti pri editácii vstupných dát.

Kniha obsahuje kapitoly hlavne z troch fyzikálne odlišných častí

- Statické geometricky a fyzikálne nelineárne úlohy telies z poddajného materiálu. Sem patrí predovšetkým kinematika veľkých deformácií a s ňou spojené alternatívne miery napätia, ďalej pružne-plastické úlohy, viskoelasticita, viskoplasticita a kríp.
- Dynamika tekutín s dôrazom na turbulentné prúdenie, s ktorým sa skoro výhradne stretávame pri úlohách technickej praxe.
- Prenos tepla s rozborom jeho troch základných spôsobov: Prenos tepla a vedením (kondukciou), sálaním (radiáciou) a prúdením (konvekciou).

Uvedená problematika spolu s elektromagnetizmom, kontaktom telies a akustikou po úvodných teoretických častiach je doplnená príkladmi, ktoré sa riešia numerickými metódami, a to metódou konečných prvkov (MKP) a metódou konečných objemov (MKO) s využitím programov *ANSYS Mechanical* a *ANSYS Fluent*. Pokiaľ je to možné, využíva sa program *Mathematica 5* na priamy výpočet úlohy zo základných diferenciálnych rovníc, prípadne aj program Matlab pri práci s maticovými rovnicami.

Poznamenávame, že text knihy do určitej miery predpokladá ovládanie základných pojmov a základnej lineárnej a nelineárnej teórie MKP zhruba v rozsahu učebníc [1] a [2].