

ŠTEFAN BENČA

VÝPOČTOVÉ POSTUPY MKP

PRI RIEŠENÍ LINEÁRNYCH ÚLOH MECHANIKY

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2006

Monografia obsahuje základnú teóriu metódy konečných prvkov pre riešenie statických a dynamických pevnostných úloh a pre výpočet stacionárneho i nestacionárneho vedenia tepla v telesách. Pre tieto úlohy zároveň poskytuje podrobné postupy konkrétneho numerického riešenia v prostredí programového systému ANSYS. Výpočtové postupy sú demonštrované na geometricky jednoduchých telesách tak, aby boli plne využiteľné aj pri riešení reálnych úloh technickej a výpočtárskej praxe.

Práca sa pokúša vyplniť medzeru existujúcu medzi podrobnými teoretickými monografiami určenými predovšetkým pre tvorcov programov MKP a výskumných pracovníkov v tejto oblasti a fyzikálne i teoreticky nekompletnými užívateľskými príručkami, ktoré sprevádzajú jednotlivé komerčné programy MKP. Môže byť tiež vhodným doplnkom základných učebníc MKP, ktoré väčšinou neposkytujú konkrétne výpočtové postupy pre aplikačne zameraného užívateľa metódy.

OBSAH

Zoznam hlavných symbolov	7
1 ZÁKLADNÉ POJMY A ÚDAJE	9
1.1 Ú v o d	9
1.2 Aplikačný záber metódy konečných prvkov	10
1.3 Princíp metódy, základné pojmy a základné kroky riešenia úlohy	12
1.4 Program ANSYS – základné údaje	16
1.5 Úvodný príklad	20
2 STATICKÉ PEVNOSTNÉ ÚLOHY	23
2.1 Formulácia úlohy	23
2.2 Diskretizácia telesa	27
2.3 Základné vzťahy a matice prvku	29
2.4 Rovnice rovnováhy prvku. Vnútorne uzlové sily	33
2.5 Matice telesa a výsledná sústava rovníc	34
<i>Príklad – Priestorové teleso</i>	38
2.6 Redukované pevnostné úlohy	42
2.6.1 Prútové sústavy	43
2.6.1.1 Výpočet matíc prútového prvku v globálnom súradnicovom systéme	43
2.6.1.2 Globálne, lokálne a prirodzené súradnice jednorozmerného prvku	45
2.6.1.3 Výpočet matíc jednorozmerného izoparametrického prvku	47
2.6.1.4 Numerická integrácia funkcií jednej premennej	49
2.6.1.5 Matice priestorového prútového prvku	50
<i>Príklad – Výpočet matíc prútových prvkov</i>	53
<i>Príklad – Rovinná prútová sústava</i>	54
2.6.2 Rámové konštrukcie	57
2.6.2.1 Deformačná teória rovinného nosníka	58
2.6.2.2 Určenie matíc rovinného rámového prvku	59
<i>Príklad – Rovinná nosníková konštrukcia</i>	63
2.6.2.3 Priestorové rámové konštrukcie	66
<i>Príklad – Priestorový rám 1</i>	70
<i>Príklad – Priestorový rám 2</i>	73
2.6.3 Dvojrozmerné úlohy	76
2.6.3.1 Matice bilineárneho izoparametrického prvku	80
2.6.3.2 Kvadratický izoparametrický štvoruholníkový prvok	83
2.6.3.3 Trojuholníkové prvky	85
2.6.3.4 Plošné súradnice trojuholníkových prvkov	87
<i>Príklad – Rotačne symetrické teleso</i>	90
2.6.3.5 P-metóda riešenia lineárnych pevnostných úloh	92
<i>Príklad – Rovinná napätosť; aplikácia p-metódy</i>	93

3	NESTACIONÁRNE PEVNOSTNÉ (DYNAMICKÉ) ÚLOHY	97
3.1	Rovnice dynamickej rovnováhy telesa (pohybové rovnice)	97
3.2	Matice hmotnosti	99
3.6	Výpočet vlastných frekvencií a vlastných tvarov kmitania	100
	<i>Príklady – Výpočet vlastných frekvencií a vlastných tvarov kmitania</i>	102
3.4	Metódy priamej integrácie pohybových rovníc	108
3.4.1	Newmarkova metóda	110
	<i>Príklady – Nestacionárne (dynamické) zaťažovanie; priama integrácia pohybových rovníc</i>	112
3.5	Riešenie sústavy rovníc v MKP	119
3.6	Metóda superpozície vlastných tvarov	121
	<i>Príklady – Využitie metódy superpozície vlastných tvarov</i>	124
3.7	Harmonická analýza	130
	<i>Príklad – Harmonická analýza</i>	132
3.8	Redukcia matíc úlohy	134
	<i>Príklad – Redukovaná metóda; úloha s proporcionálnym tlmením</i>	136
4	PRENOS TEPLA VEDENÍM	139
4.1	Formulácia úlohy	139
4.2	Geometrická a časová diskretizácia úlohy. Matice prvku a telesa.	
	Výsledná sústava rovníc	141
	<i>Príklad – Výpočet ustáleného teplotného poľa</i>	144
	<i>Príklad – Analýza nestacionárneho teplotného poľa</i>	148
	Literatúra	150

ZOZNAM ZÁKLADNÝCH SYMBOLOV

INDEXY

e	všeobecný, ľubovoľný, e -ty prvok
i, j, k, \dots	lokálne číslovanie uzlových bodov (uzlov) prvku
NVU	počet stupňov voľnosti uzla
NVE	počet stupňov voľnosti prvku
NVT	počet stupňov voľnosti výpočtového modelu telesa
NUE	počet uzlov prvku
NUT	počet uzlov telesa
NET	počet prvkov telesa

LATINSKÉ A GRÉCKE SYMBOLY

E	modul pružnosti v ťahu
G	modul pružnosti v šmyku
I_z	kvadratický moment prierezu k osi
I_k	moment tuhosti prierezu v krútení
μ	Poissonovo číslo materiálu
N_i^e	interpoláčna (tvarová) funkcia prvku
ω	vlastná kruhová frekvencia kmitania
Ω	kruhová frekvencia harmonického zaťaženia
P_i, Q_i	vnútorné uzlové sily prvku
t	čas
Δt	časový krok
T	teplota
V_e, S_e, L_e	objem, plocha, dĺžka prvku
u, v, w	zložky posunutia bodu v globálnom súradnicovom systéme
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	zložky posunutia bodu v lokálnom súradnicovom systéme prvku
x, y, z	globálne súradnice
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	lokálne súradnice prvku
ξ, η, ζ	prirodzené súradnice prvku

MATICE

u^e, u	vektor (stĺpcová matica) posunutí uzlových bodov prvku, telesa
b, p, F	vektor objemových, plošných, sústredených síl

$\mathbf{B}^e, \mathbf{B}_e$	transformačná matica pretvorení
\mathbf{C}	matica tlmenia telesa
\mathbf{D}	matica materiálových konštánt
$\boldsymbol{\varepsilon}$	stĺpcová matica obsahujúca zložky pretvorenia
$\boldsymbol{\varepsilon}_T$	vektor začiatočného teplotného pretvorenia
\mathbf{f}^e, \mathbf{f}	vektor vonkajších uzlových síl prvku, telesa
$\boldsymbol{\phi}$	vektor vlastného tvaru kmitania telesa
\mathbf{J}_e	Jacobiho matica izoparametrického prvku
\mathbf{K}^e, \mathbf{K}	matica tuhosti prvku, telesa
\mathbf{M}^e, \mathbf{M}	matica hmotnosti prvku, telesa
$\mathbf{N}^e, \mathbf{N}_e$	matica interpolačných (tvarových) funkcií prvku
\mathbf{q}	vektor vnútorných uzlových síl
$\boldsymbol{\sigma}$	stĺpcová matica obsahujúca zložky napätia
$\tilde{\mathbf{u}}$	vektor posunutí všeobecného bodu
$\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{f}}$	redukované matice telesa
$\underline{\mathbf{K}}^e, \underline{\mathbf{f}}^e$	rozšírené matice prvku
$\bar{\mathbf{K}}^e, \bar{\mathbf{a}}^e, \bar{\mathbf{q}}^e$	matice v lokálnom súradnicovom systéme prvku

1 ZÁKLADNÉ POJMY A ÚDAJE

1.1 Ú v o d

Výpočtové úlohy, s ktorými sa stretávavame v inžinierskej praxi, možno rozdeliť do dvoch základných skupín:

- a) úlohy pre diskkrétne sústavy a konštrukcie
- b) úlohy pre spojité telesá a oblasti

Príkladmi z prvej skupiny môže byť napr. nosníková konštrukcia, rozvod tepla, resp. tekutiny v potrubnej sieti, elektrický obvod a pod. Takúto sústavu možno prirodzeným spôsobom rozdeliť na jednotlivé *prvky*, ktoré sa stýkajú v spoločných *bodoch (uzloch)*. Napísaním rovnovážnych (bilančných) podmienok pre uzly dostaneme sústavu obyčajných rovníc, z ktorých možno dostať hľadané hodnoty v uzloch a zo známych vzťahov medzi uzlovými a prvkovými hodnotami aj riešenie pre celú sústavu.

Úlohy pre spojité telesá a oblasti vedú obyčajne na (parciálne) diferenciálne rovnice, ktoré treba riešiť pri okrajových, prípadne i začiatočných podmienkach úlohy. Telesá a oblasti sú pritom často zložito priestorovo tvarované, s lokálnymi nespojitostami a komplikovanými okrajovými podmienkami. Často treba riešiť nestacionárne, nelineárne a nestabilné úlohy. Uvedené problémy pri väčšine praktických inžinierskych úloh neumožňujú exaktné riešenie diferenciálnych rovníc úlohy a musíme použiť približné metódy na výpočet hľadaných hodnôt.

V súvislosti s rozvojom výpočtovej techniky sa v súčasnosti na približné (numerické) riešenie diferenciálnych rovníc často používajú tzv. *priame metódy*. Sú to také metódy približného riešenia úloh z teórie diferenciálnych a integrálnych rovníc, ktoré prevedú tieto úlohy na konečné systémy algebrických rovníc. Celý proces možno naprogramovať a po zadaní vstupných hodnôt výpočet neznámych zo systému rovníc a spracovanie výsledkov veľmi efektívne vykoná počítač.

V teórii i pri praktickom použití priamych metód možno v mnohých prípadoch riešenie diferenciálnej rovnice nahradiť ekvivalentnou úlohou nájdenia funkcie, ktorá minimalizuje špeciálny integrál (potenciál, funkcionál) danej úlohy. Niekedy je výhodnejšie použiť priamu metódu na riešenie takejto ekvivalentnej úlohy, ako na riešenie diferenciálnej rovnice. Napr. pri udaných okrajových podmienkach sa môže riešenie diferenciálnych rovníc pružnosti telesa nahradiť minimalizáciou integrálu, ktorý vyjadruje celkovú potenciálnu energiu zaťaženého telesa. Metódy, ktoré nahrádzujú úlohu integrovania diferenciálnej rovnice, resp. rovníc, hľadaním extrémů funkcionálu úlohy, sa vo všeobecnosti nazývajú *variačné*.

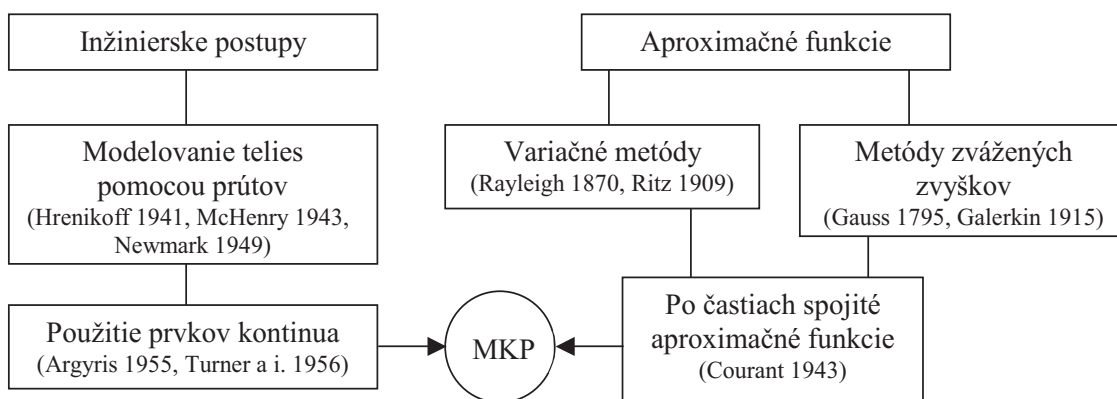
Za základné zdroje vzniku a rozvoja MKP môžeme považovať aplikáciu spôsobu riešenia diskrétnych úloh na spojité teleso, resp. spojitú oblasť v kombinácii s využitím modifikovaného variačného postupu. Oproti klasickým variačným postupom sa v MKP nehľadajú aproximačné funkcie na celej oblasti riešenia, ale len na jej častiach (konečných prvkoch) so zaručením spojitosti funkcií na hraniciach prvkov. Historické zdroje vzniku MKP sme znázornili na obrázku 1.1, údaje o priekopníckych prácach uvedených autorov možno nájsť napr. v [1, 2]. Ďalší vývoj a búrlivý rozvoj metódy ilustrujú publikácie v [3].

Možnosť využitia postupov riešenia diskrétnych úloh aj pre spojité oblasti vedie tiež na *jednu z definícií MKP*: Je to približná metóda riešenia úloh kontinua, pri ktorej

- a) sa kontinuum rozdelí na určitý počet častí s *konečnými* rozmermi (na *konečné prvky*), ktorých vlastnosti určuje určitý počet parametrov

b) riešenie celého systému, ktorý je tvorený súhrnom jeho prvkov zviazaných v tzv. *uzlových bodoch*, sa vykoná rovnakým postupom ako pri úlohách diskretného charakteru.

Dôležitým dôsledkom takéhoto postupu je fakt, že *primárnymi neznámymi* nebudú hľadané funkcie úlohy, ale len hodnoty týchto funkcií v uzlových bodoch a bude sa riešiť *sústava obyčajných rovníc*. Z vypočítaných hodnôt na hraniciach prvkov za pomoci aproximačných funkcií prvkov možno však získať *približné spojité* riešenie úlohy na prvkoch a tým i na celej oblasti.



Obrázok 1. 1 Základné zdroje vzniku MKP

1.2 Aplikačný záber metódy

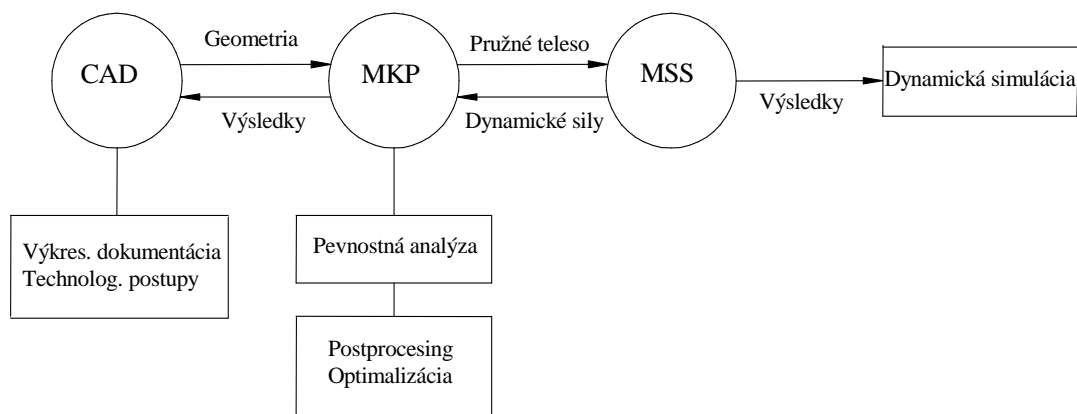
Z úvodnej charakteristiky MKP je zrejmé, že ju pre spojité oblasti môžeme charakterizovať aj ako približnú, počítačovo orientovanú metódu riešenia diferenciálnych rovníc. Použitie voliteľných podoblastí (konečných prvkov) pritom jednoducho rieši problém geometrických, materiálových a iných nespojitostí (hranica nespojitosti sa stotožní s hranicou prvkov s rozdielnymi charakteristikami spôsobujúcimi nespojitosť – skoková zmena geometrie, zaťaženia, rozdielny materiál a pod.). Algoritmizácia a programové spracovanie spojené s výkonnou výpočtovou technikou nielen že umožňuje riešiť zložité úlohy výskumnej a technickej praxe, ale efektívnym spôsobom zjednodušuje aj zadávanie úlohy a vyhodnocovanie výsledkov jej riešenia (grafický pred- a postprocesing). Veľké komerčné programové systémy určené na riešenie výpočtárskych úloh pomocou MKP (ANSYS, NASTRAN, ADINA, MARC, COSMOS a i.) využívajú analógiu riešenia úloh mechaniky kontinua a sú stavané univerzálne, t. j. užívateľ v podstate rovnakým postupom, mnohokrát aj rovnakými príkazmi, rieši úlohy z mechaniky telies, prenosu tepla, prúdenia, akustiky, elektromagnetického poľa a pod. Nemusí teda pre každú oblasť študovať iný a inak užívateľsky stavaný program.

Univerzálne programové systémy MKP v súčasnosti obsahujú hlavne túto aplikačnú ponuku:

- **Pružnosť a pevnosť/Dynamika:** 2D a 3D pevnostné úlohy geometricky všeobecných telies a konštrukcií pri ľubovoľnom statickom a dynamickom zaťažení, vlastné frekvencie, harmonické budenie, všeobecné a náhodné zaťažovanie, spektrálna analýza
- **Nonlinearity:** izotropná a anizotropná plasticita, veľké posunutia a deformácie, 2D a 3D kontaktné úlohy s trením, strata stability, hyperelastické a tesniace materiály, betón, creep, swelling, viskoelasticita a viskoplasticita

- **Lomová mechanika, flexibilná kinematika, kompozitné materiály**
- **Prenos tepla:** stacionárne, nestacionárne; lineárne, nelineárne; konvekcia, kondukcia a radiácia; fázové premeny
- **Prúdenie:** stacionárne - nestacionárne, laminárne - turbulentné, stlačiteľné - nestlačiteľné, newtonovské - neneutronovské, jednozložkové - viaczložkové, adiabatické - alebo s prenosom tepla a výpočtom koeficientov prestupu tepla, tlakové vlny a rázy, priama väzba na teplotné pole a pevnostnú mechaniku pri problémoch prúdenie + prenos tepla + mechanické zaťaženie, interakcia tekutiny s konštrukciou
- **Simulácia zvracích procesov:** na 2D, resp. 3D telesách; teplotné pole, fázové/štrukturálne zmeny materiálu, tvrdosť, zvyškové napätia
- **Problémy polí:** Elektrické pole, magnetické pole, elektrostatika, piezoelektrické javy, akustika, interakcia akustickej tekutiny s konštrukciou, zviazané problémy a i.
- **Optimalizačné výpočty** pre tzv. cieľovú funkciu (napr. napätie, hmotnosť, tvar telesa a pod.)
- **Vlastný preprocessing** (interaktívny grafický i s vlastným programovacím jazykom), možnosť tvorby subštruktúr (superelementov), submodeling, okolo 200 typov konečných prvkov rôzneho určenia a presnosti

Efektívna inžinierska práca je v súčasnosti už nemysliteľná bez kvalifikovaného využívania počítačových technológií (CAT). V tomto komplexe MKP (v angličtine FEM – *Finite Element Method*) v oblasti pevnostných výpočtov najužšie spolupracuje s prostriedkami pre dizajn (CAD) a simuláciu mechanických sústav (MSS) zhruba podľa schémy na obr. 1.2. O približnosti tejto schémy treba hovoriť preto, že časti MKP (najmä lineárne pevnostné riešenia) sú už často integrálnou súčasťou CAD systémov (napr. I-DEAS, PRO/I, CATIA, SOLID EDGE). Pravda, úloha MKP nespočíva len v priamej službe pre tento reťazec. Ako sme uviedli, jej záber je širší, umožňuje *samostatné* numerické analýzy zložitých inžiniersko-fyzikálnych problémov (ktoré v konečnom dôsledku opäť slúžia pre návrh virtuálnych prototypov CAT).



Obrázok 1.2 Miesto MKP v prostredí počítačových technológií

V tomto samostatnom zmysle sa MKP budeme venovať aj v tejto práci. Budeme predpokladať, že pôsobiace „silové“ účinky sú známe a pôsobia na geometricky *jednoduché* telesá. Na takýchto úlohách si vysvetlíme princíp metódy, teoretické základy a aplikačné (výpočtové) postupy. Riešenie úlohy pre *zložitú* reálne teleso, resp. oblasť má rovnaké teoretické základy a v aplikačnej oblasti vyžaduje len viac práce s grafickým editorom, čo je úloha intuitívne zvládnuteľná postupnou praxou. Na konkrétne výpočty úloh budeme využívať univerzálny program ANSYS [4].

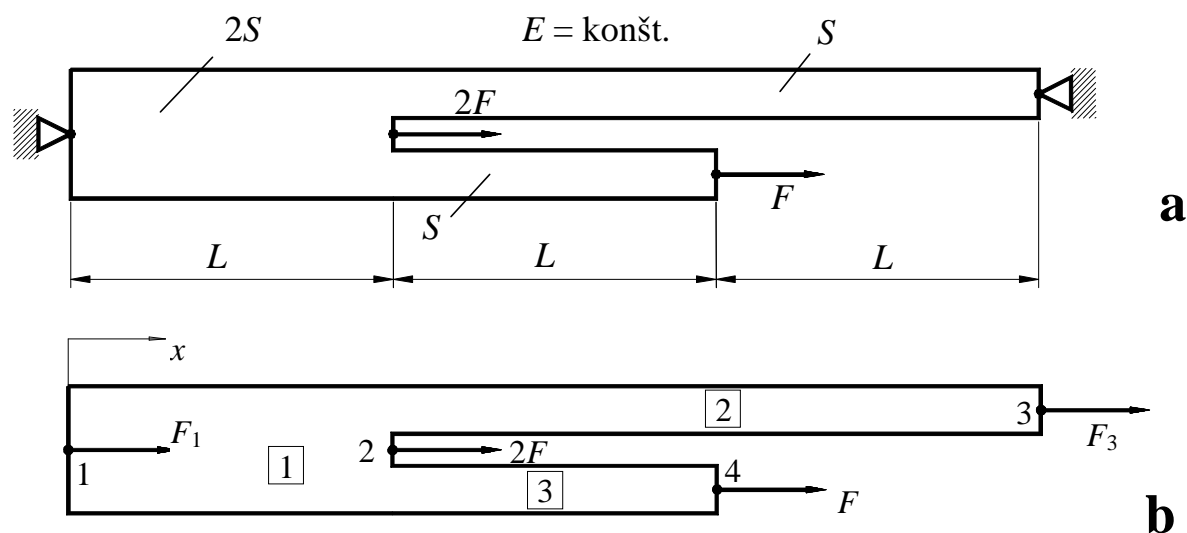
1.3 Princíp metódy, základné pojmy a základné kroky riešenia úlohy

Konkrétny postup riešenia úlohy pomocou MKP obsahuje kroky, ktoré sa pri každej úlohe opakujú a dajú sa výhodne algoritmicke spracovať a naprogramovať. Tento postup možno najnázornejšie sledovať, a princíp metódy najľahšie pochopiť, pri riešení jednoduchých *diskrétnych jednorozmerných* úloh. I keď pri riešení viacrozmerných diskrétnych úloh a úloh pre *spojité* telesá a oblasti princíp i postup zostávajú zachované (pozri uvedenú definíciu metódy), vzhľadom na zložitejšie východzie formulácie sú viacej schované a menej názorné, nehovoriac o tom, že aj malé jednoduché úlohy sa nedajú vyčísliť bez pomoci počítača.

Uvažujme jednorozmernú pevnostnú úlohu pre prút upevnený a zaťažný podľa obr. 1.3. Pretože neuvažujeme vlastnú tiaž a zanedbáme malý ohyb telesa, prút je zaťažný jednoduchým ťahom/tlakom od síl F a $2F$. Je vyrobený z materiálu, ktorého modul pružnosti v ťahu/tlaku je E ; dĺžka L a prierez S sú známe. Našou úlohou je výpočet posunutí, reakcií a napätí prúta pomocou MKP.

1. Diskretizácia telesa (oblasti)

Rozdelenie telesa na konečné prvky je v takomto prípade jednoduchý proces; v mieste každej náhlej zmeny prierezu alebo zaťaženia musí byť *uzlový bod (uzol)* a časť telesa medzi dvomi uzlovými bodmi predstavuje *konečný (prútový) prvok*. Vznikla tak úloha s tromi prvkami a štyrmi uzlovými bodmi (obr. 1.3b), tzv. *výpočtový model* úlohy. Všimnime si, že pre silové reakcie F_1 a F_3 , ktoré nahrádzajú účinok väzieb, sme zvolili zmysel podľa kladného zmyslu tzv. *globálneho súradnicového systému* platného pre celé teleso (súradnica x v obrázku), napriek tomu, že v skutočnosti pôsobia opačne. Je to dôležitá zásada numerických (počítačových) metód platná nielen pri *zadávaní* vektorov a ich zložiek, ale aj pri ich *vyhodnocovaní* vo výsledkoch. V tomto prípade dostaneme číselné veľkosti reakcií F_1 a F_3 so záporným znamienkom, čo znamená, že ich vektory pôsobia v opačnom zmysle ako má os x globálneho súradnicového systému zvoleného pre riešenie úlohy.



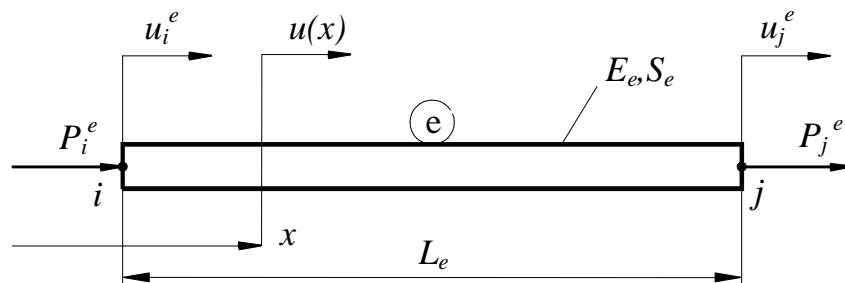
Obrázok 1. 3 Jednorozmerná úloha;

a) vstupné údaje (geometrický model)

b) rozdelenie na prvky a očíslovanie uzlových bodov (výpočtový model)

2. Určenie parametrov všeobecného prvku

Z formálneho hľadiska sú všetky prvky úlohy charakterizované rovnakými parametrami. Ak si zo zaťaženého telesa pomocou myslenných rezov tesne vedľa (presnejšie povedané nekonečne blízko) uzlov vydelíme *všeobecný, ľubovoľný, e-ty prvok (element) s lokálnym číslovaním uzlov i, j* (obr. 1.4), potom vidieť, že v našom prípade vstupné (známe, zadávané) parametre sú: E_e, S_e , a $L_e = x_j - x_i$.



Obrázok 1. 4 Jednorozmerný prúťový (konečný) prvok

V myslenných rezoch sa objavili neznáme silové účinky odstránených častí telesa prenášané cez uzly, tzv. *vnútorné uzlové sily* P_i^e a P_j^e . Prívlastok vnútorné je tu dôležitý, pretože v uzloch môžu pôsobiť aj známe zadané vonkajšie uzlové sily (pozri obr. 1.3). Pripomíname tiež, že koncové body prvku sú nekonečne blízko uzlov a preto prívlastok uzlové je aj na prvkoch oprávnený. Globálne x -ové *posunutia uzlov* u_i^e a u_j^e sú tiež neznáme. Na základe vzorcov elementárnej pružnosti ťahaného/tlačeného prúta sa ľahko presvedčíme (pozri príklad 1.1), že medzi posunutiami uzlov a uzlovými (koncovými) silami prúta platí maticový vzťah

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (1.3-1)$$

kde $k_e = \frac{E_e S_e}{L_e}$, je tzv. tuhosť prúta (je to sila, ktorá by natiahla prút o jednotku dĺžky)

a matica \mathbf{K}^e je *symetrická matica tuhosti prvku*. Ak sa nám podarí vypočítať pre prvok *uzlové posunutia prvku* \mathbf{u}^e budeme vedieť podľa (1) určiť aj *vnútorné uzlové sily prvku* \mathbf{q}^e . Potom už môžeme určovať aj ostatné, z primárnych neznámych odvodené, neznáme. Pri pevnostnej úlohe sú to napr. pomerné deformácie (pretvorenia) prvkov

$$\varepsilon^e = \frac{\Delta L_e}{L_e} = \frac{u_j^e - u_i^e}{L_e} \quad (1.3-2)$$

a napätia

$$\sigma^e = E_e \varepsilon^e = \frac{E_e}{L_e} (u_j^e - u_i^e) \quad (1.3-3)$$

Ak za *primárne* neznáme budeme považovať posunutia uzlov (a nie vnútorné uzlové sily), potom hovoríme o *deformačnej formulácii MKP*, ktorá sa pri pevnostných úlohách skoro zásadne používa. Hlavný dôvod spočíva v tom, že pri deformačnej formulácii sa ľahšie určujú okrajové podmienky. Pri reálnych úlohách máme totiž omnoho viac informácií o väzbách (upevneniach) telesa ako o silových reakciách, ktoré vznikajú v týchto miestach.

Príklad 1.1

Zo zaťaženej prútovej konštrukcie sme pomocou myslenných rezov v bodoch i a j vybrali prút s dĺžkou L_e (obr. 1.4). Nech prierez prúta je S_e a modul pružnosti v ťahu E_e . Treba určiť vzťahy medzi koncovými silami P_i^e, P_j^e a koncovými posunutiami u_i^e, u_j^e . (Kvôli jednoduchosti zápisu vynecháme označenie e -teho elementu.)

Zo silovej podmienky rovnováhy prúta vyplýva

$$P_i = -P_j \quad (a)$$

Predĺženie prúta je

$$u_j - u_i = \frac{P_j L}{ES} \quad (b)$$

a z toho dostávame

$$P_j = \frac{ES}{L}(u_j - u_i) \quad (c)$$

Vzhľadom na (a) platí

$$P_i = \frac{ES}{L}(u_i - u_j) \quad (d)$$

Ak rovnice (c) a (d) napíšeme v maticovom tvare

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} ES/L & -ES/L \\ -ES/L & ES/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (e)$$

určili sme maticu tuhosti jednorozmerného prúta \mathbf{K}^e .

3. Sústava uzlových rovníc

Neznáme uzlové veličiny určujeme z rovnovážnych (bilančných) podmienok (rovníc), ktoré platia pre uzly, t. j. pre miesta, kde sa jedine uskutočňuje interakcia prvkov výpočtového modelu. Tieto podmienky vyplývajú z fyzikálnej podstaty úlohy a ich počet sa rovná celkovému počtu neznámych.

V našom príklade máme 4 neznáme: posunutia uzlov 2 a 4 a reakcie v uzloch 1 a 3. Potrebné rovnice dostaneme zo *silových podmienok rovnováhy uzlov*. Pomocou myslenných rezov tesne vedľa uzlov vyberieme z telesa jeho štyri uzly a napíšeme pre ne podmienky rovnováhy vonkajších a vnútorných síl. Treba pri tom dodržiavať definíciu znamienka (zmyslu) vnútorných uzlových síl podľa obr. 1.4, lebo len vtedy platí vzťah (1), ktorý budeme pri riešení úlohy využívať. (Na obr. 1.4 sú znázornené sily, ktorými pôsobia uzly na prvok; prvok na uzly pôsobí rovnako veľkými silami ale opačného zmyslu). Silové podmienky rovnováhy uzlov sú (pozri pomocný obrázok pre uzol 2)

$$\left. \begin{aligned} P_i^{(1)} &= F_1 \\ P_j^{(1)} + P_i^{(2)} + P_i^{(3)} &= 2F \\ P_j^{(3)} &= F_3 \\ P_j^{(4)} &= F \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Pomocou (1) nahradíme v tejto sústave vnútorné uzlové sily posunutiami uzlov (lokálne číslovanie posunutí uzlov nahradíme globálnym číslovaním podľa obr. 1.3 b)

$$\left. \begin{aligned} k_1 u_1 - k_1 u_2 &= F_1 \\ -k_1 u_1 + k_1 u_2 + k_2 u_2 - k_2 u_3 + k_3 u_2 - k_3 u_4 &= 2F \\ -k_2 u_2 + k_2 u_3 &= F_3 \\ -k_3 u_2 + k_3 u_4 &= F \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

čím sme prešli na deformačnú formuláciu úlohy. Po zavedení okrajových podmienok $u_1 = u_3 = 0$ dostávame z (5) posunutia voľných uzlov $u_2 = 6/5 FL/(ES)$ a $u_4 = 11/5 FL/(ES)$ a reakcie $F_1 = -12/5 F$; $F_3 = -3/5 F$. Pomocou (3) určíme napätia v prvkoch $\sigma^{(1)} = 6/5 F/S$; $\sigma^{(2)} = -3/5 F/S$; $\sigma^{(3)} = F/S$ a tým je úloha vyriešená.

Prehľadnosť pri väčších úlohách i teoretické a algoritmické postupy MKP vyžadujú dôsledný maticový zápis. V tomto zápise bude sústava (5) mať tvar

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F \\ F_3 \\ F \end{bmatrix} = \mathbf{f} \quad (1.6)$$

kde \mathbf{K} je matica tuhosti, \mathbf{u} vektor posunutí a \mathbf{f} vektor uzlových síl telesa. Matica tuhosti telesa je pozitívne definitná, symetrická a pri väčších úlohách výrazne pásová. Všetky tieto jej vlastnosti sa využívajú pri efektívnom riešení výslednej sústavy rovníc veľkých úloh. Jej rozborom ľahko zistíme, že vznikla ako súčet tzv. *rozšírených matic tuhosti prvkov* \mathbf{K}^e .

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{NET} \mathbf{K}^e = \mathbf{K}^1 + \mathbf{K}^2 + \mathbf{K}^3 = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Podľa postupu naznačeného v (7) sa v programoch MKP matica \mathbf{K} tvorí veľmi efektívne priamo z matic tuhosti prvkov, pričom sa využíva jej symetria a pásovosť na efektívne uloženie do pamäti počítača. Sústavu silových rovníc (4) v takomto procese možno vynechať, fyzikálny princíp však zostáva: každá z deformačne formulovaných rovníc v (5) a (6) predstavuje *silovú* rovnicu rovnováhy v uzlovom bode telesa. Tento princíp platí aj pri viacrozmerných úlohách, kedy sa pre uzol píšú podmienky rovnováhy pre každý jeho *stupeň voľnosti* (napr. posunutie v smere y , natočenie okolo osi z a pod.).

Z uvedeného princípu riešenia úlohy pomocou MKP vyplýva, že jeho základom je vytvorenie matice tuhosti všeobecného prvku v (1). Je to vždy štvorcová matica, ktorej stupeň (počet riadkov, resp. stĺpcov) je rovný počtu stupňov voľnosti prvku. Z rozboru vzťahu (1) a s pomocou obr. 1.4 si môžeme overiť všeobecnú definíciu elementov matice tuhosti prvku: Element matice tuhosti prvku k_{ij} je rovný sile v mieste i vyvolanej jednotkovým posunutím v mieste j , pričom prvok upevníme tak, že všetky ostatné stupne voľnosti odstránime. Symetria matice $k_{ij} = k_{ji}$ vyplýva z Maxwellovej – Bettiho vety o vzájomnosti posuvov. (Sila v mieste i od jednotkového posunutia v mieste j sa rovná sile v mieste j od jednotkového posunutia v mieste i .)

Poznámka: Analógia úloh a univerzálnosť programov MKP

Zmeňme teraz fyzikálny pohľad na úlohu zadanú na obr. 1.3 a uvažujme, že ide o jednorozmernú stacionárnu úlohu vedenia tepla. Geometria telesa zostáva nezmenená, ale mení sa fyzikálny význam niektorých vstupných parametrov a, pochopiteľne, zaťaženie, okrajových podmienok i hľadaných neznámych. Postup riešenia úlohy pomocou MKP sa však vôbec nezmení a úlohu možno riešiť úplne analogicky:

Primárne neznáme sú teraz teploty u_2 a u_4 , pričom sme predpísali $u_1 = u_3 = 0$ °C. Konštanta E predstavuje koeficient vedenia tepla materiálu. Zaťaženie F predstavuje veľkosť zadaného tepelného toku. Vzťah medzi teplotami a tepelnými tokmi v uzloch prvku udáva (1), kde maticu $\mathbf{K}^{(e)}$ môžeme teraz nazvať *maticou tepelnej vodivosti* prvku. Číselné výsledky riešenia sú totožné. (Znamienko mínus pri F_1 a F_3 znamená odvod tepla z uzla, kladné hodnoty F a $2F$ predstavujú prívod tepla do uzlov. Poznamenávame, že totožnosť číselných výsledkov sa narušuje pri viacrozmerných úlohách, pretože teplota je skalár a posunutie je vektor.)

Sústavu analogických uzlových rovníc možno vytvoriť aj pre riešenie potrubných systémov, hydraulických sietí, elektrických obvodov a pod.

Pretože pri MKP aj úlohy pre spojité kontinuum sa vždy diskretizujú a riešia rovnakým postupom, je prirodzené, že vznikli aj tzv. *univerzálne programové systémy MKP*, ktoré sú schopné efektívne riešiť v podstate všetky úlohy mechaniky a technickej fyziky, ktoré boli spracované v teórii MKP, v súčasnosti v rozsahu uvedenom v časti 1.2.