

23 Analýza zviazaných fyzikálnych polí

23.1 Úvod a základné pojmy

V predchádzajúcich častiach sme uvažovali, že analyzované teleso alebo oblasť predstavuje spojité kontinuum s určitými materiálovými vlastnosťami, pre ktoré sme pri zadaných parametroch úlohy a zvolených nezávislých premenných hľadali neznáme premenné. Napr. pri analýze mechanicky zaťaženého telesa z poddajného materiálu sme pomocou vhodnej metódy určili jeho posunutia, pretvorenia a napätia a spojité množiny týchto hodnôt sme nazývali *pole posunutí* $\mathbf{u}(x,y,z,t)$, *pole pomerných deformácií* $\boldsymbol{\epsilon}(x,y,z,t)$ a *pole napätí* $\boldsymbol{\sigma}(x,y,z,t)$. Tieto polia možno zaradiť do jedinej konkrétnej fyzikálnej disciplíny – mechaniky poddajného telesa; ich vzájomná závislosť sa odohráva len v rámci tejto jedinej fyzikálnej oblasti a hovoríme o jednoduchej (nezviazanej, monofyzikálnej) úlohe.

Komplikovanejšia situácia nastane, keď takéto mechanicky zaťažené teleso budeme ohrievať. Dôjde k interakcii existujúcich polí (nazvime ich *mechanické polia*) s *poľom teploty* $T(x,y,z,t)$, ktoré treba určiť pomocou postupov inej fyzikálnej disciplíny – prenosu tepla. Teplotné pole ovplyvní mechanické polia tepelnou rozťažnosťou, navyše účinkom teploty sa môžu meniť mechanické vlastnosti materiálu telesa, prípadne môže teplota ovplyvňovať okrajové podmienky. Za určitých okolností (napr. cyklické pružne-plastické nestacionárne namáhanie telesa alebo vysokofrekvenčné elastické namáhanie) môžu aj mechanické polia spätne ovplyvniť teplotné pole. V takomto prípade hovoríme o *zviazanej* analýze (zviazanej úlohe, o úlohe *zviazaných polí*, o *multifyzikálnej* úlohe).

Medzi najčastejšie prípady zviazaných úloh patria:

- fluidno-mechanická (analýza účinkov prúdenia tekutiny na konštrukčné časti)
- tepelno-mechanická (analýza účinkov tepelného poľa na teleso; hlavne tepelné stroje a zariadenia, mechanické obrábanie a tvárnenie)
- piezoelektrická (analýza interakcie deformácie telesa a elektrického poľa, napr. mikrofóny a senzory)
- elektromagneticko-mechanická (interakcia elektromagnetického a mechanického poľa; elektromagnetické zariadenia, napr. pohyb kotvy cievky elektrického spínača alebo analýza indukovaného prúdu účinkom pohybu permanentného magnetu)
- elektromagneticko-tepelná (napr. indukčné ohrievanie)
- elektrostaticko-mechanická (prevodníky, spínače, akčné členy, pohony, senzory v MEMS, t.j. v mikro-elektro-mechanických systémoch nanotechniky)
- ďalšie kombinácie uvedených úloh

Niektoré zviazané úlohy, ako napr. fluidno-mechanické analýzy charakterizujú jasne oddelené podoblasti (v tomto prípade teleso a oblasť prúdenia tekutiny) a príslušné jasne oddelené závislé premenné. V takomto prípade dochádza k väzbe oboch oblastí len na ich stýkajúcej sa hranici a hovoríme o *geometricky* (plošne) zviazaných úlohách.

Iné úlohy zase charakterizuje neoddeliteľná väzba fyzikálne rozdielnych hľadaných premenných a parametrov v spoločnej oblasti (napr. nestacionárna tepelno-mechanická zviazaná úloha s teplotne závislými materiálovými vlastnosťami). Väzba premenných je vnútorná, v každom materiálovom bode oblasti, a vyžaduje formuláciu bilančných

diferenciálnych rovníc a konštitutívnych vzťahov platných pre danú úlohu. O takýchto úlohách hovoríme, že sú *objemovo* (vnútorne) alebo *materiálovo* zviazané.

V programe Ansys možno na riešenie zviazaných úloh využívať dve základné metódy:

- *priamu* metódu, ktorá využíva špeciálne prvky so všetkými potrebnými stupňami voľnosti fyzikálnych polí pre priame riešenie príslušnej zviazanej úlohy. Využíva sa najmä na riešenie niektorých objemovo alebo materiálne zviazaných úloh.
- a tzv. *sekvenčné* metódy, nazývané aj metódami *prenosu zaťaženia*, ktoré v iteračných krokoch postupne striedavo riešia fyzikálne rozdielne diferenciálne rovnice úlohy a vypočítané výsledky prenášajú medzi fyzikálnymi oblasťami, až kým sa nedosiahne konvergencia úlohy (konvergencia prenášaných zaťažení). Využívajú sa na riešenie plošne i objemovo zviazaných úloh, a to hlavne tých, ktoré nevykazujú vysoký stupeň nelinearity medzi zviazanými premennými.

Ktorú z týchto metód je možné alebo výhodnejšie použiť závisí od typu riešenej úlohy. Možno uviesť niekoľko zásad:

- metóda prenosu zaťaženia
 - sieť prvkov pre uvažované fyzikálne polia je, alebo musí byť, rozdielna
 - ide o väzbu prúdenia s niečím iným ako je prenos tepla
- priama metóda
 - silná väzba medzi poliami
 - nelineárna väzba
 - vyskytuje sa akustické pole
 - vyskytuje sa piezoelektrina
 - ide o úlohu s prúdením cez pórovitý materiál
 - vyskytuje sa difúzia

Pri formulácii a programovaní zviazaných úloh *priamou* metódou sa v MKP využívajú dva algoritmické postupy:

1. so *silnou* väzbou polí (maticovou, simultánnou, plnou), kde maticový zápis rovníc má tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \quad (0.1)$$

Väzba (v tomto prípade dvoch) rozdielných polí \mathbf{X}_1 a \mathbf{X}_2 je zahrnutá v mimodiagonálnych sub-maticiach \mathbf{K}_{12} a \mathbf{K}_{21} .

2. so *slabou* väzbou polí (sekvenčnou, alebo väzbou vektorov zaťaženia), kde maticový zápis rovníc v najvšeobecnejšom prípade (obojsstranná väzba) má tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \end{bmatrix} \quad (0.2)$$

Väzbu polí v tomto prípade zabezpečuje závislosť \mathbf{K}_{11} a \mathbf{F}_1 na \mathbf{X}_2 , ako aj \mathbf{K}_{22} a \mathbf{F}_2 na \mathbf{X}_1 .

Špeciálne prvky, umožňujúce riešiť zviazaný problém priamou metódou, poskytujú oproti metóde prenosu zaťaženia viaceré výhody. Jedna z hlavných, samozrejme, je to, že umožňujú analýzu zviazaných polí aj v prípadoch, kedy riešenie pomocou prenosu zaťaženia monofyzikálnych prvkov nie je možné. Ďalej zjednodušujú modelovanie tým, že sa výpočtový

model vytvára len s jedným typom prvkov, s jedinou sieťov prvkov, s jednoduchým zadávaním okrajových podmienok i jednoduchou analýzou výsledkov.

23.2 Mechanicko-tepelná väzba

Teplotné pole $T(x,y,z,t)$ vyvoláva v telese teplotnú (tepelnú) rozťažnosť, t.j. teplotné deformácie a teplotné napätia, ktoré sa superponujú s poliami od mechanického zaťaženia. Navyše teplota môže ovplyvniť materiálové vlastnosti telesa a tým i jeho pevnostnú a tuhostnú spoľahlivosť.

Samostatne sme sa s termálnymi a mechanickými pevnostnými úlohami zaoberali v [1], [2] i vo viacerých kapitolách tejto práce, kde možno nájsť základné diferenciálne rovnice i základné pojmy z týchto fyzikálnych oblastí.

V tejto časti sa budeme zaoberať zviazanými (súčasnými) účinkami mechanických polí a teploty a aplikačným postupom slúžiacim na analýzu takto zaťaženého telesa. Na ilustračné príklady budeme využívať program Ansys, dá sa však povedať, že aj v ostatných komerčných programoch MKP sú postupy riešenia tejto úlohy i ďalších zviazaných úloh analogické s týmto systémom.

Pri mechanicko-tepelných úlohách sa často hovorí len o *jednosmernej* zviazanosti, pretože vo väčšine takýchto úloh nás zaujíma len účinok teplotného poľa na mechanické polia zaťaženého telesa. Účinok mechanických deformácií a napätí na teplotné pole (pri obojstrannej väzbe) je pri mnohých úlohách malý a možno ho zanedbať. Pri niektorých špeciálnych úlohách (pozri obr. 1) sa ale musí zohľadniť.

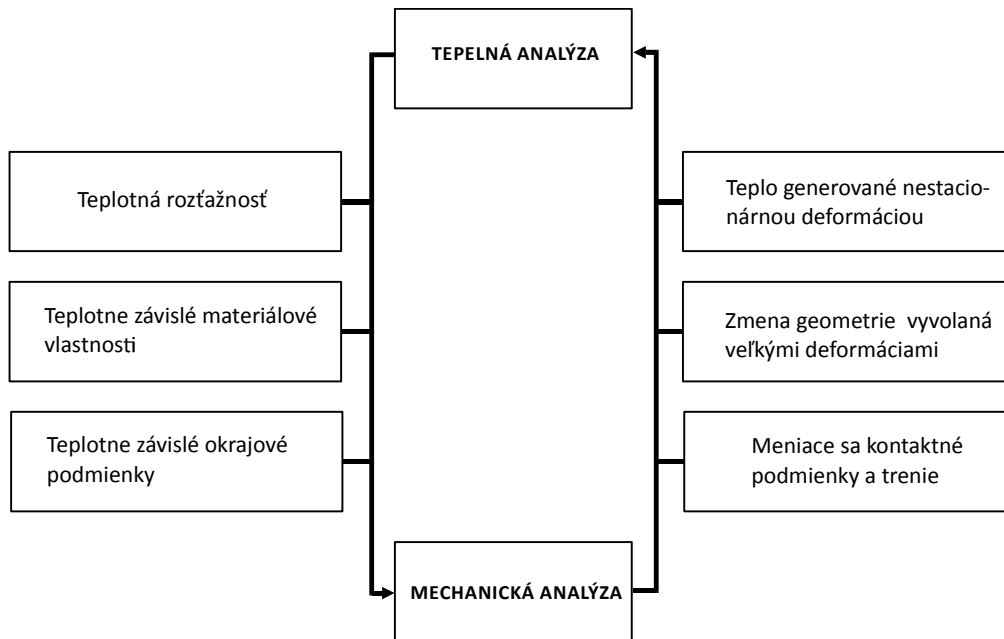
Najjednoduchšie sa riešia stacionárne lineárne úlohy v prípade, kedy zviazanie ustáleného teplotného pola a statických mechanických polí vedie na lineárnu výslednú úlohu.

Princíp postupu spočíva v tom, že sa najprv pre teleso nezávisle určí teplotné pole (vyrieši sa termálna úloha, pričom program teplotné pole uloží do výsledkového súboru). Potom sa nezávisle rieši mechanická pevnostná úloha s analogickým pevnostným prvkom na rovnakej prvkovej sieti ako termálna úloha (poloha uzlov je rovnaká) s udaným koeficientom teplotnej rozťažnosti a s *načítaným teplotným polom* z uloženého súboru (t.j. s pridaným objemovým teplotným zaťažením). Vzhľadom na stacionárnosť a lineárnosť úlohy nie sú potrebné časové ani iterčné kroky.

Tento postup sa principiálne využíva aj v metódach prenosu zaťaženia pri nestacionárnych i nelineárnych zviazaných úlohách, kedy sa ale o mnohonásobný efektívny prenos polí a kontrolu konvergencie pre príslušný časový resp. integračný krok stará zvolený typ riešiča programu.

Priame riešenie zviazanej termoelastickéj úlohy (i s obojstrannou väzbou) možno numericky realizovať pomocou špeciálnych konečných prvkov, ktoré obsahujú stupne voľnosti pre obe fyzikálne prostredia.

Pokiaľ ide len o jednosmernú väzbu (čo je najčastejší prípad), kedy mechanické polia neovplyvňujú teplotné pole, priame riešenie sa málo líši od klasického postupu známeho z riešenia monofyzikálnej pevnostnej úlohy. Platí to i pre nestacionárne a nelineárne úlohy. Rozdiel spočíva len v tom, že materiálové vlastnosti, okrajové podmienky i zaťaženia musíme zadať komplexne pre pevnostnú i termálnu úlohu, čo špeciálny prvok svojími stupňami voľnosti umožňuje a vo vlastnom výpočtovom behu akceptuje.

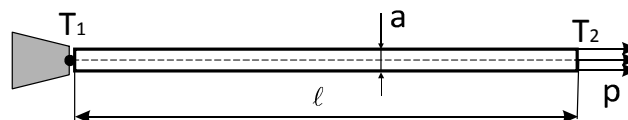


Obr.23.1 Obostranne zviazaná mechanicko-tepeľná analýza

Prenos teplotného poľa (teplotného zaťaženia) na mechanicky zaťažené teleso si v programe AnsysMultiphysics (editácia úlohy je jednoduchšia ako v AnsysWorkbench) ukážeme na jednoduchom lineárnom príklade. Tú istú úlohu potom vyriešime pomocou špeciálneho prvku, ktorý rieši účinky zviazaných polí súčasne v jednom výpočtovom behu programu, čím celý proces aj pri takomto jednoduchom príklade citelne zjednodušuje. (Zložitejšie úlohy, vrátane nestacionárnych a nelineárnych, sa riešia úplne rovnako, len sú spojené s väčšou časovou náročnosťou na editačnú tvorbu výpočtového modelu a odpadá tiež príjemná možnosť analytického overenia výsledkov.)

Príklad 23.1

Oceľový prút na obrázku je zaťažený ťahovým napätím $p = 100 \text{ MPa}$. Prút má dĺžku $\ell = 1 \text{ m}$,



štvorcový prierez so stranou $a = 10 \text{ cm}$, modul pružnosti materiálu $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, Poissonovo číslo $\mu = 0,3$ a koeficient teplotnej rozťažnosti $\alpha = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$. Prút je po dĺžke tepelne izolovaný s koncovými teplotami $T_1 = 180 \text{ }^\circ\text{C}$ a $T_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Tepelná vodivosť materiálu je $\lambda = 50 \cdot 10^3 \text{ W/(mm}^\circ\text{C)}$. Vlastnú tiaž prúta zanedbávame. Materiálové vlastnosti prúta sa pri zmene teploty nemenia. Vzťažná teplota $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$.

Určte výsledné predĺženie prúta účinkom sily i teploty.

Analytické riešenie

Priebeh teploty po dĺžke prúta je lineárny s priemernou teplotou

$$T = (T_1 + T_2) / 2 = (180 + 20) / 2 = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$$

čo je zároveň pri vzťažnej teplote (t.j. teplote pri ktorej je teleso bez teplotných deformácií) zvolenej 0 °C aj priemerné ohriatie prúta ΔT . Potom predĺženie prúta účinkom teploty je

$$\Delta l_T = \alpha \Delta T l = 10^{-5} \cdot 100 \cdot 1000 = 1 \text{ mm}$$

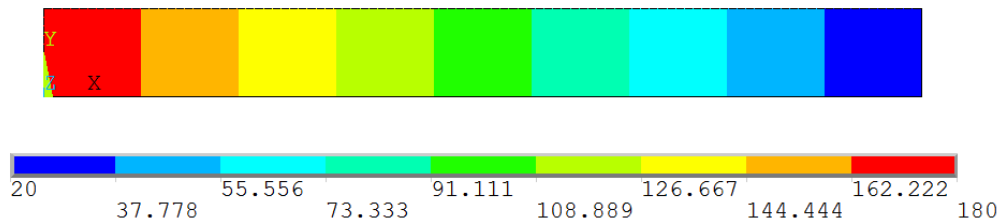
Predĺženie prúta účinkom mechanického napätia dostaneme zo vzorca z elementárnej pružnosti

$$\Delta l_F = \frac{F l}{S E} = \rho \frac{l}{E} = 100 \cdot \frac{1000}{2 \cdot 10^5} = 0,5 \text{ mm}$$

Výsledné predĺženie prúta potom je $\Delta l = 1,5 \text{ mm}$.

Sekvenčné riešenie pomocou programu Ansys

1. Zadanie termálneho prvku
Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add..., Thermal Solid, 8 node 77, OK, Close;
2. Materiálové vlastnosti termálneho prvku
Material Props, Material Models, Thermal, Conductivity, Isotropic, KXX = 50E3, OK, Material, Exit;
3. Tvorba geometrie
Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1 = 0, X2 = 1000, Y1 = 0, Y2 = 100, OK;
4. Sieť prvkov
Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, Size = 10, OK;
Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;
5. Okrajové teplotné podmienky
Solution, Define Loads, Apply, Thermal, Temperature, On Lines, Kliknite ľavú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = 180, Apply, Kliknite pravú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = 20, OK;
6. Výpočet rozdelenia teploty
Solve, Current LS, OK;
7. Vykreslenie rozdelenia teploty
General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Dof Solution, Nodal Temperature, OK;



8. Zmena prvku na mechanický (pevnostný)
Preprocessor, Element Type, Switch Element Type, Thermal to Struc, OK; (Zavrite upozornenie, že treba zadať a skontrolovať všetky vstupné údaje a nastavenia pre fyzikálne iný typ prvku.)
9. Materiálové vlastnosti mechanického prvku

Material Props, Material Models, Favorites, Linear Static, Linear Isotropic, EX = 2E5, PRXY = 0.3, OK, Thermal Expansion (secant-iso), ALPX = 1E-5, OK, Material, Exit;

10. Upevnenie telesa

Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Lines, Kliknite ľavú stranu obdĺžnika, OK, UX = 0, OK;

Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Keypoints, Kliknite ľavý spodný roh obdĺžnika, OK, UY = 0, OK;

11. Zadanie ťahového napätia

Solution, Define Loads, Apply, Structural, Pressure, On Lines, Kliknite pravú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = -100, OK;

12. Zadanie teplotného zaťaženia (pri nezadaní názvu úlohy všetky súbory sú *file* s príslušnou koncovkou, súbor s teplotným poľom má koncovku *rth*)

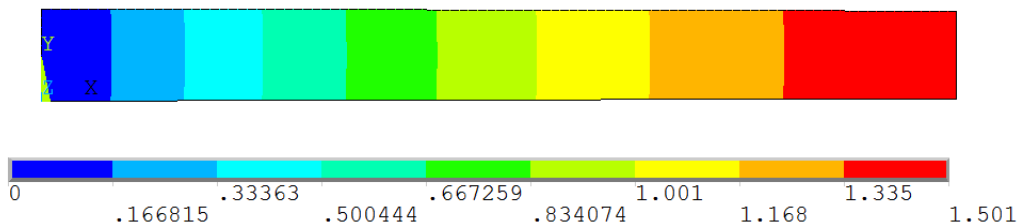
Solution, Define Loads, Apply, Temperature, From Therm Analy, Fname = file.rth, OK;

13. Výpočet úlohy

Solve, Current LS, OK;

14. Vykreslenie predĺženia prúta od mechanického i teplotného zaťaženia

General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, DOF Solution, X-Component of displacement, OK;



15. Uloženie databázy úlohy (s odporúčaným premenovaním v pracovnom adresáre)

ANSYS Toolbar, SAVE_DB;

Príklad 23.2

Riešte príklad 23.1 priamou metódou pomocou termo-mechanického prvku

Priame riešenie pomocou programu Ansys

1. Zadanie termo-mechanického prvku

Predprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add..., Coupled Field, Quad 8node 223, OK, Close;

2. Materiálové vlastnosti prvku

Material Props, Material Models, Thermal, Conductivity, Isotropic, KXX = 50E3, OK, Favorites, Linear Static, Linear Isotropic, EX = 2E5, PRXY = 0.3, OK, Thermal Expansion (secant-iso), ALPX = 1E-5, OK, Material, Exit;

3. Tvorba geometrie

Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1 = 0, X2 = 1000, Y1 = 0, Y2 = 100, OK;

4. Sieť prvkov

Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, Size = 10, OK;

Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;

5. Okrajové podmienky

Solution, Define Loads, Apply, Thermal, Temperature, On Lines, Kliknite ľavú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = 180, Apply, Kliknite pravú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = 20, OK;

Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Lines, Kliknite ľavú stranu obdĺžnika, OK, UX = 0, OK;

Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Keypoints, Kliknite ľavý spodný roh obdĺžnika, OK, UY = 0, OK;

6. Zadanie ťahového napätia

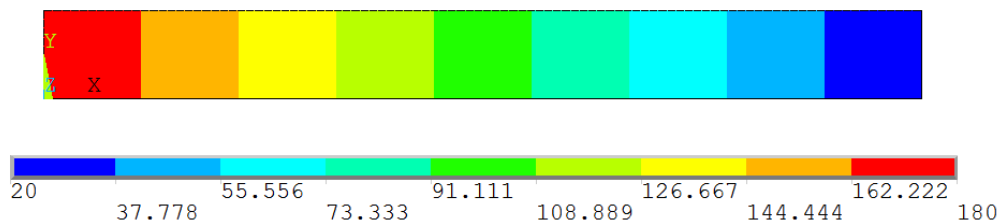
Solution, Define Loads, Apply, Structural, Pressure, On Lines, Kliknite pravú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = -100, OK;

7. Výpočet

Solve, Current LS, OK;

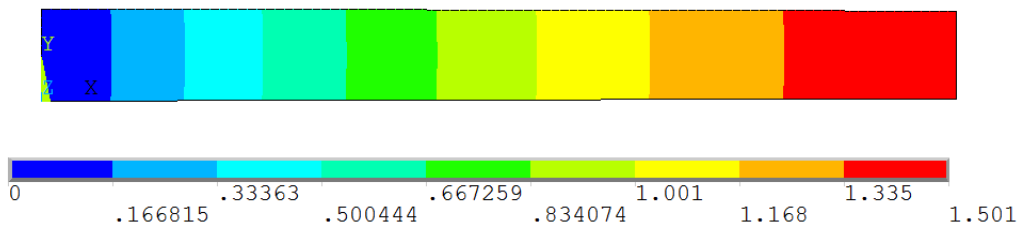
8. Vykreslenie rozdelenia teploty

General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Dof Solution, Nodal Temperature, OK;



9. Vykreslenie predĺženia prúta od mechanického i teplotného zaťaženia

General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, DOF Solution, X-Component of displacement, OK;



10. Uloženie databázy úlohy (s odporúčaným premenovaním v pracovnom adresáre)

ANSYS Toolbar, SAVE_DB;

Ako sme ukázali v predchádzajúcej časti, jednosmerné termálno-mechanické problémy sa riešia jednoducho, pričom možno využiť jednak klasické monofyzikálne prvky s prenosom tepelného zaťaženia, ako aj špeciálne prvky so priamym zviazním mechanických a teplotných polí.

Pravda, pri obojstrannej väzbe, t.j. v prípade kedy mechanické polia spätne ovplyvňujú teplotné pole, možno analýzu robiť len pomocou špeciálnych prvkov, ktoré majú v sebe takúto schopnosť zabudovanú.

23.2.1 Termoelasticita

Pri budenom čiste elastickom kmitaní telesa k bežným tlmiacim účinkom (mechanické tlmenie, odpor prostredia) prispieva aj interné (materiálové) tlmenie s relatívne veľmi malou generáciou tepla a určitou disipáciou celkovej elastickej energie (energie napätosti, deformačnej práce vnútorných síl) telesa. Pri väčšine technických úloh je toto tlmenie

zanedbateľne malé, má však vplyv pri kmitaní niektorých členov (predovšetkým vysokofrekvenčných rezonátorov) MEMS systémov, kde je pre ich optimálny návrh užitočné riešiť obojstranne zviazanú termo-elastickú úlohu s analýzou tohto vplyvu.

Základné rovnice konečného prvku schopného priamo zviazať mechanické polia lineárne elasticky namáhaného telesa s poľom teploty pri nestacionárnom tepelnom a mechanickom zaťažovaní sa tvoria zviazaním diferenciálnych konštitutívnych rovníc oboch fyzikálnych úloh. Pri formulácii takýchto prvkov sa využíva diferenciálna rovnica nestacionárneho vedenia tepla **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov.** zviazaná s nestacionárnym prírastkom ([16], [17]) tepla účinkom mechanických polí (druhý člen na pravej strane rovnice)

$$\Lambda \nabla^2 T = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \alpha^T \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (23.1)$$

kde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} = \text{matica tepelnej vodivosti}$$

∇^2 = Laplaceov operátor

T = teplota

ρ = hustota materiálu

$c_v = c - \frac{T_0}{\rho} \alpha^T \mathbf{D} \alpha$ = merná tepelná kapacita pri konštantnom objeme

c = merná tepelná kapacita (merné teplo) materiálu

T_0 = vzťažná teplota (pri ktorej je teleso bez teplotných deformácií)

$\alpha = [\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, 0, 0, 0]^T$ = vektor koeficientov teplotnej rozťažnosti materiálu

t = čas

$\sigma = \mathbf{D} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T$ = vektor napätia

$\epsilon = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T$ = vektor celkovej deformácie

\mathbf{D} = matica elastických materiálových vlastností telesa [1]

Pri nestacionárnom zaťažovaní je procedúra MKP schopná určiť nestacionárne hodnoty celkovej energie napätosti na elemente a sumáciou v celom telese zo vzťahu

$$A = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon^T dV \quad (23.2)$$

Pri harmonickej analýze má tento vzťah tvar

$$A = \frac{1}{2} \int_V \sigma \bar{\epsilon}^T dV \quad (23.3)$$

kde $\bar{\epsilon}$ je komplexný vektor celkovej deformácie. Reálna časť tohto vzťahu predstavuje energiu napätosti a imaginárna časť energiu disipovanú účinkom termoelastického tlmenia. Veľkosť termoelastického tlmenia v telese možno potom vyjadriť pomerom

$$\frac{1}{Q} = \frac{\sum_{n=1}^{NET} \text{Im}(A)}{\sum_{n=1}^{NET} \text{Re}(A)} \quad (23.4)$$

kde NET je celkový počet termoelastických prvkov telesa. Čím je toto číslo menšie, tým sú straty energie vplyvom termoelastického tlmenia menšie. Obrátená hodnota tohto čísla Q sa nazýva *faktor kvality* telesa z ohľadom na jeho termoelastické tlmenie (čím je Q väčšie, tým je kvalita napr. MEMS rezonátora vyššia).

Fyzikálnej príčine vzniku disipácie energie (vnútorného tlmenia) pri nestacionárnom elastickom zaťažovaní možno porozumieť predstavou cyklicky namáhaného tepelne izolovaného nosníka. Pri zložitejších tvaroch jeho kmitania niektoré časti budú ťahané (teplota klesne), iné stlačované (teplota vzrastie). Vzniknú časti s rozdielnou teplotou s príslušným tokom tepla. Pretože tepelný tok je nezvratný proces, dôjde k strate energie a k tlmeniu príslušného (rezonančného) tvaru kmitania nosníka (rezonátora).

Mechanizmus termoelastického tlmenia prvý teoreticky objasnil a pomocou materiálových konštánt kvantifikoval C. Zener s obmedzením na kmitanie tenkých nosníkov. Pre takéto teleso odvodil analytický vzťah [16] (vynechávame členy so zanedbateľne malým príspevkom)

$$\frac{1}{Q} = \frac{E\alpha T_0}{\rho c} \frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \quad (23.5)$$

kde E je modul pružnosti, α koeficient izotropnej teplotnej rozťažnosti, ω kruhová frekvencia kmitania nosníka a T_0 je vzťažná teplota nosníka v Kelvinoch. Pre konštantu tepelného relaxačného času platí

$$\tau = \frac{\rho c h^2}{\pi^2 \lambda} \quad (23.6)$$

kde h je výška pravouhlého prierezu nosníka a λ izotropný koeficient tepelnej vodivosti.

Aplikácia variačného princípu na pohybovú rovnicu prvku a rovnicu vedenia tepla s ich prepojením cez člen s materiálovou generáciou tepla v (23.1) vedie na maticové rovnice termo-elastického konečného prvku v tvare

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_e \\ \ddot{\mathbf{T}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_e^{te} & \mathbf{C}_e^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_e \\ \dot{\mathbf{T}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & \mathbf{K}_e^{te} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_e^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{T}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_e \\ \mathbf{Q}_e(T, \sigma) \end{Bmatrix} \quad (23.7)$$

kde

\mathbf{M}_e = matica hmotnosti

\mathbf{C}_e = matica mechanického tlmenia

\mathbf{K}_e = matica tuhosti

\mathbf{u}_e = vektor uzlových posunutí

\mathbf{f}_e = vektor vonkajších uzlových síl

\mathbf{C}_e^t = matica merného tepla (mernej tepelnej kapacity)

\mathbf{C}_e^{te} = matica termoelastického tlmenia

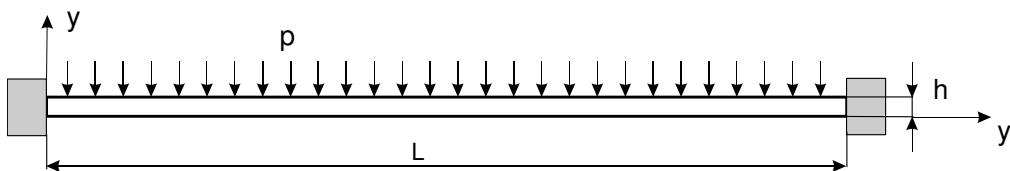
- \mathbf{K}_e^t = matica tepelnej vodivosti
- \mathbf{K}_e^{te} = termo-elastická matica tuhosti
- \mathbf{T}_e = vektor uzlových teplôt
- \mathbf{Q}_e = vektor termo-elastických zaťažení prvku

Príklad 23.3

Tenký kremíkový obostranne votknutý nosník na obrázku harmonicky kmitá na ohyb účinkom budiaceho tlaku $p = 0,1$ MPa s frekvenciou f . Nosník má dĺžku $300 \mu\text{m}$, jednotkovú šírku a výšku $h = 5 \mu\text{m}$. Materiálové vlastnosti nosníka sú:

Modul pružnosti $E = 1,3 \cdot 10^5$ MPa, Poissonovo číslo $\mu = 0,3$, hustota $\rho = 2,33 \cdot 10^{-15}$ kg/ $(\mu\text{m})^3$, tepelná vodivosť $\lambda = 9,0 \cdot 10^7$ pW/ (μmK) , merné teplo $c = 6,99 \cdot 10^{14}$ pJ/(kgK), koeficient teplotnej rozťažnosti $k = 7,8 \cdot 10^{-6}$ 1/K.

Určte priebeh hodnoty termoelastického tlmenia $1/Q$ v rozmedzí frekvenčného budenia od $f = 10^5$ po 10^7 Hz.



Analytické riešenie

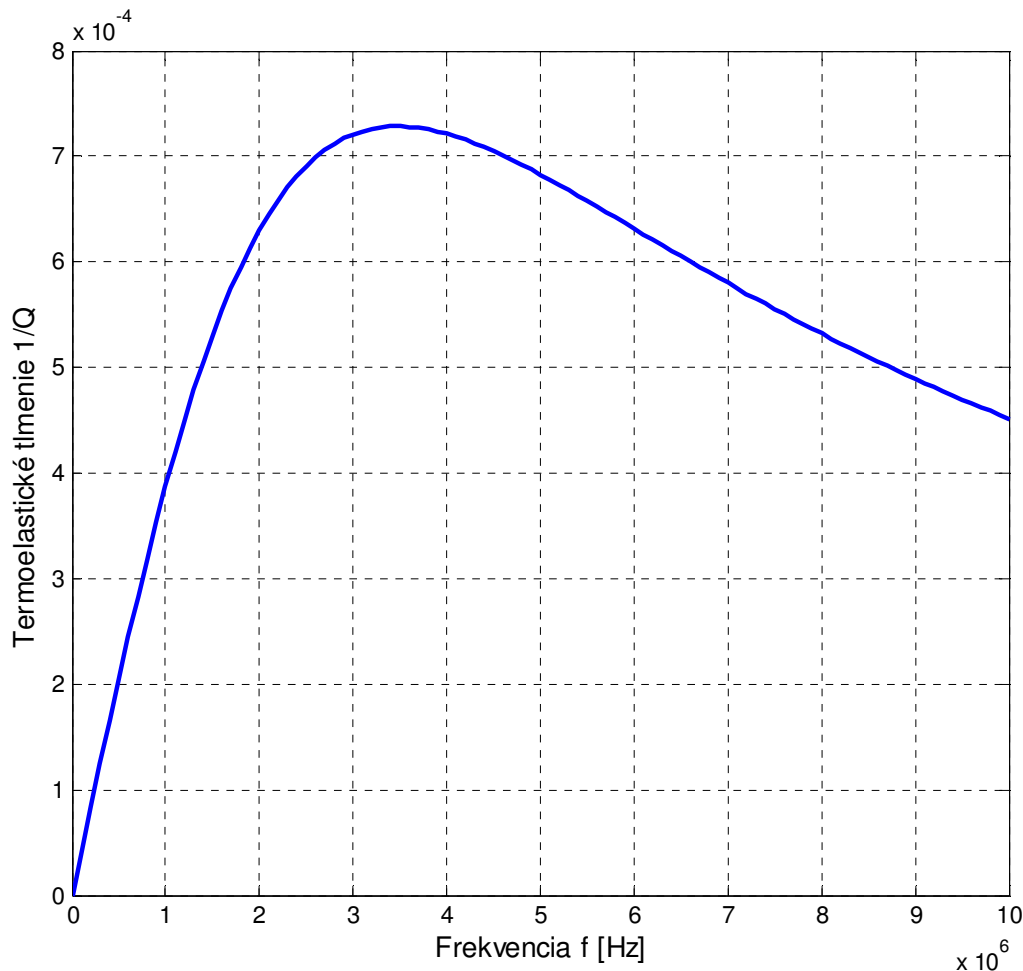
Využijeme vzťah (23.5), ktorý vyčíslime a graficky znázorníme pre celý rozsah frekvencií pomocou programu Matlab s príkazmi:

<code>EE = 1.3*10^5; ro = 2.33*10^-15; alfa = 7.8*10^-6;</code>
<code>cp = 6.99*10^14; kapa = 9.0*10^7; Ti = 300; h = 5;</code>
<code>delta = EE*alfa^2*Ti/ro/cp;</code>
<code>tau = ro*cp*h^2/kapa/pi^2;</code>
<code>x = 0:10^5:10^7;</code>
<code>om=2*pi*x;</code>
<code>y = delta*om*tau./(1 + (2*pi*x*tau).^2);</code>
<code>plot(x,y);</code>
<code>xlabel('Frekvencia f [Hz'],'FontSize',10)</code>
<code>ylabel('Termoelastické tlmenie 1/Q','FontSize',10)</code>
<code>grid on</code>

Pre extrém frekvencie platí

$$f_{ext} = \frac{1}{2\pi\tau} = 3,472 \cdot 10^6 \text{ Hz} \quad (23.8)$$

a grafický priebeh termoelastického tlmenia je zázornený na obr. 23.2.



Obr. 23.2 *Termoelastické tlmenie nosníka 1/Q podľa vzťahu (23.5) v rozsahu budiacej frekvencie $f = 0$ až 10^7 Hz*

Riešenie pomocou programu Ansys

Harmonická analýza nosníka v rozsahu budiacej frekvencie tlaku $f = 0$ až 10^7 Hz, s krokom 10^7 Hz (t.j. so 100 krokmi), je v programe Ansys jednoduchá. Zložitejšie je však vybratie a spracovanie potrebných hodnôt z výsledkovej databázy do vzťahu (23.4). Pretože termoelastické tlmenie $1/Q$ chceme vyčíslieť pre každý krok, potrebujeme vytvoriť makro (pomocný podprogram v jazyku APDL – *Ansys Parametric Design Language*), ktoré túto úlohu po prebehnutí výpočtu v cykle so 100 krokmi splní.

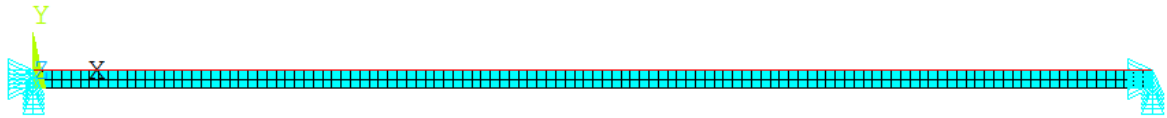
Makro sa napíše vo vhodnom editačnom programe, napr. v NOTEPADe, a pod nejakým názvom s koncovkou *mac* sa uloží do pracovného adresára Ansysu. Makro sa musí spustiť v postprocesore, lebo len tam sú vypočítané výsledky prístupné. Potrebné hodnoty a príkazy pre našu úlohu sú (význam príkazov možno nájsť v *Helpe* Ansysu):

f = 100000
df = 100000
*dim,frek,table,100
*dim,q,table,100

*do, i, 1, 100
set,,,,0, f
etab,wr,nmisc,4
set,,,,1, f
etab,wi,nmisc,4
ssum
*get,enr,ssum,,item,wr
*get,eni,ssum,,item,wi
qq=enr/eni
frek(i)=f
q(i)=1/qq
f=f+df
*enddo
/axlab,x,Frekvencia f (Hz)
/axlab,y,Termoelastické tlmenie 1/Q
*vplot,frek(1),q(1)

Po uložení makra s názvom *makro.mac* sme úlohu vyriešili pomocou postupnosti týchto inter-aktívnych príkazov:

1. Zadanie termomechanického prvku
Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Dele,Add, Coupled Field, Quad 8node 223, OK, Close;
2. Teplota udaná v stupňoch Celsia sa prepočíta na absolútnu (TOFF = 273 °C)
Material Props, Temperature Units, TOFF = Celsius, OK;
3. Referenčná teplota (teplota pri ktorej je teleso bez teplotnej deformácie)
Define Loads, Settings, Reference Temp, TREF = 27, OK;
4. Materiálové vlastnosti prvku
Material Props, Material Models, Favorites, Linear Static, Density, DENS = 2.33E-15, OK, Linear Isotropic, EX = 1.3E5, Density PRXY = 0.28, OK, Thermal Expansion (secant-iso), ALPX = 7.8E-6, OK, Thermal, Conductivity, Isotropic, KXX =90E6, OK, Specific Heat, C = 6.99E14, Material, Exit;
5. Tvorba geometrie nosníka
Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1 = 0, X2 = 300, Y1 = 0, Y2 = 5, OK;
6. Sieť prvkov
Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, Size = 2.5, OK;
Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;
7. Upevnenie nosníka
Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Lines, Kliknite ľavú a pravú stranu obdĺžnika, OK, UX = 0, Apply, Kliknite opäť ľavú a pravú stranu obdĺžnika, OK, UY = 0, OK;
8. Zaťaženie nosníka
Define Loads, Apply, Structural, Pressure, On Lines, Kliknite hornú stranu obdĺžnika, OK, VALUE = 0.1, OK;



9. Typ analýzy

Analysis Type, New Analysis, Harmonic, OK;

10. Údaje pre harmonickú analýzu

Load Step Options, Time/Frequenc, Freq and Substeps, HARFRG, 0, 10E6, NUSURST = 100, KBC = Stepped, OK;

11. Výpočet

Solve, Current LS, OK;

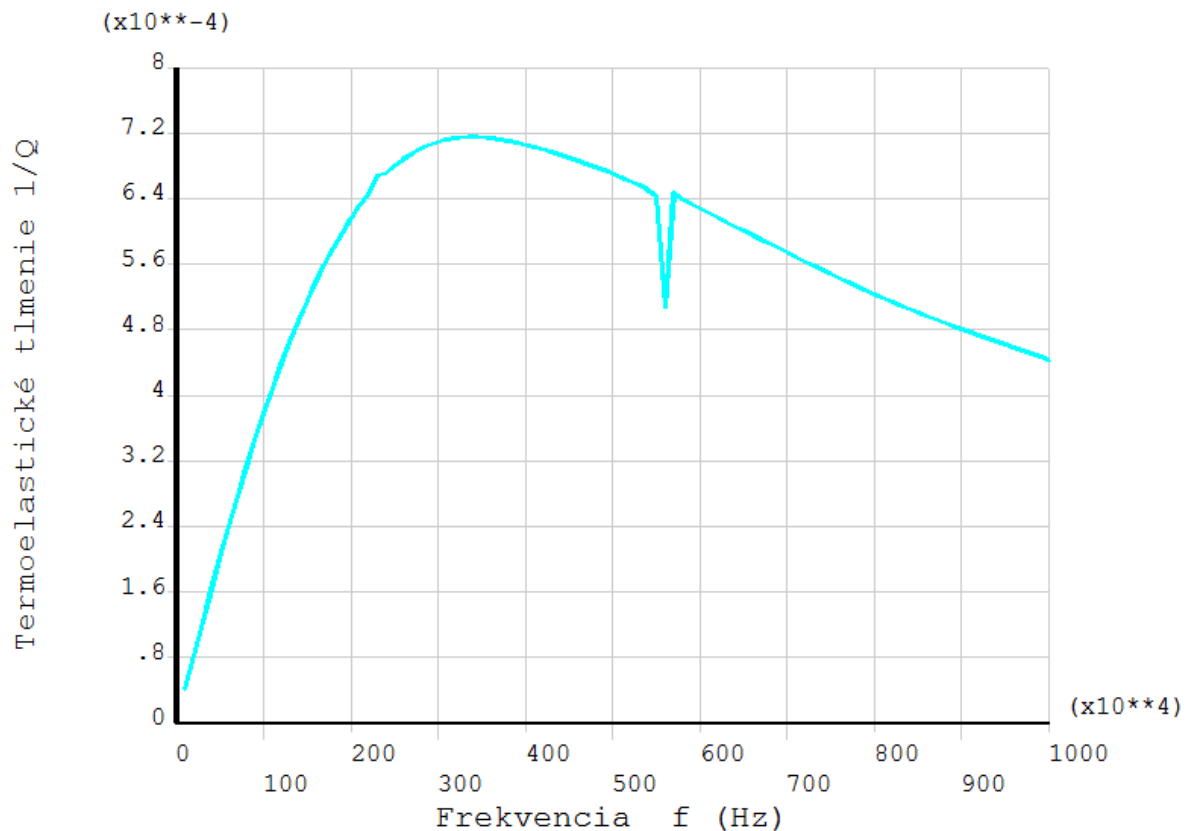
12. Ukončenie *Solution* a prechod do postprocesora

Finish

General Postproc

13. Spustenie makra na výpočet $1/Q$ a vykreslenie jeho priebehu v celom intervale frekvencií

Utility Menu, Macro, Execute Macro, Name of macro to be executed = makro, OK;



14. Uloženie databázy úlohy (s odporúčaným premenovaním v pracovnom adresáre)

ANSYS Toolbar, SAVE_DB;

Výsledky prakticky súhlasia s analytickým riešením. Výhodou numerického riešenia je však možnosť využitia postupu aj pre iné tvary a geometriu rezonátorov alebo iných častí MEMS.

23.2.2 Termoplasticita

V novších verziách programu Ansys (od verzie 14.5 vyššie) možno vykonať aj približnú analýzu zviazanej termoplastickej úlohy pomocou prvkov PLANE223, SOLID226 a SOLID227. Myslí sa tým zvýšenie teploty telesa počas plastickej deformácie tým, že časť plastickej práce sa premení na teplo.

Vo formulácii termoplastického prvku sa zviaže diferenciálna pohybová rovnica prvku [2] s diferenciálnou rovnicou nestacionárneho vedenia tepla **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov.** cez hustotu tepelného toku \dot{Q}^p od časti premenenej plastickej práce

$$\dot{Q}^p = \beta \dot{W}^p \quad (23.9)$$

kde β je Taylor-Quinneyov koeficient udávajúci aká časť plastickej práce \dot{W}^p sa premieňa na teplo (je to zadávaná, vstupná hodnota pre danú úlohu) a pre časovú zmenu plastickej práce platí

$$\dot{W}^p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (23.10)$$

kde vektory na pravej strane rovnice sú

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}]^T$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = [\dot{\epsilon}_x^p \quad \dot{\epsilon}_y^p \quad \dot{\epsilon}_z^p \quad \dot{\epsilon}_{xy}^p \quad \dot{\epsilon}_{yz}^p \quad \dot{\epsilon}_{xz}^p]^T$$

Výsledná sústava rovníc nestacionárnej rovnováhy všeobecného e-teho termoelastického prvku v maticovom zápise potom je

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_e \\ \ddot{\mathbf{T}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_e^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_e \\ \dot{\mathbf{T}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_e^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{T}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_e \\ \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_e^p \end{Bmatrix} \quad (23.11)$$

kde

\mathbf{M}_e = matica hmotnosti (prvku)

\mathbf{C}_e = matica mechanického tlmenia

\mathbf{K}_e = matica tuhosti

\mathbf{u}_e = vektor uzlových posunutí

\mathbf{f}_e = vektor vonkajších uzlových síl

\mathbf{C}_e^t = matica merného tepla (mernej tepelnej kapacity)

\mathbf{K}_e^t = matica tepelnej vodivosti

\mathbf{T}_e = vektor uzlových teplôt

\mathbf{Q}_e = vektor termálnych zaťažení prvku

\mathbf{Q}_e^p = vektor tepelného zaťaženia prvku od tepla generovaného plasticou deformáciou

23.3 Vázba fluidného a mechanického poľa

S problémom interakcie prúdiacej tekutiny s viac alebo menej poddajným telesom (FSI, *Fluid-Structure Interaction*) sa v priemyselnej praxi a vedeckej analýze, ale i bežnom živote, stretávame veľmi často. Prúdenie závisí od tvaru telesa a jeho pohybu a naopak pohyb

(deformácia) telesa závisí od mechanických síl prúdenia pôsobiacich na teleso. Spomeňme aspoň niekoľko typických príkladov: Kmitanie krídiel lietadla, deformácia a dynamické javy v potrubných systémoch, deformácie lopatiek turbíny, nafúknutie automobilového airbagu alebo dynamika padáka, hojdačí pohyb lode, pumpovanie krvi srdečnou komorou a jej prietok cez chlopne a krvné riečište.

FSI samozrejme zohráva tiež dôležitú úlohu nielen pri riešení takýchto a analogických úloh, ale aj pri vývoji a dizajne nových moderných systémov v ktorých uvedená fyzikálna zviazanosť je významná.

Neodmysliteľná nelineárna podstata a častá časová závislosť tejto triedy úloh komplikuje a častokrát úplne znemožňuje využívanie analytických metód. Je preto prirodzené, že v ostatných rokoch došlo k významnému rozvoju počítačových numerických metód, ktoré sú v súčasnosti schopné efektívne riešiť širokú škálu úloh z oblasti FSI [1].

Úlohy jednosmernej zviazanosti, t.j. úlohy kedy pohyb (deformácia) telesa v postate nemení hranicu a tvar fluidnej oblasti, sa riešia pomerne jednoducho. Nezávisle sa vyrieši fluidná úloha a jej účinky sa prenesú cez stýkajúcu sa hranicu oboch oblastí na teleso, ktoré sa potom opäť analyzuje nezávisle. Platí to aj pre nestacionárne a aj mechanicky nelineárne úlohy, kedy sa tento prenos zaťaženia a riešenia vykonáva postupne v jednotlivých diskretných časových a integračných krokoch. Pri veľkých úlohách treba prekonať problém nerovnakého nároku na hustotu siete pre fluidnú a mechanickú oblasť. Sú však k dispozícii algoritmy, ktoré sú schopné fyzikálne regulárne zviazať obe oblasti aj na hranici s nerovnakou hustotou siete, t.j. s neprekrývajúcimi sa (nestotožnenými) uzlami.

Väčšie algoritmické a programátorské ťažkosti sú spojené s riešením obojstranne zviazaných fluidno-mechanických úloh. V takomto prípade je pohyb (deformácia) telesa taká, že nezanedbateľne mení tvar zviazanej fluidnej oblasti, čím ovplyvní charakter a parametre prúdenia. Späťne zase zmenené prúdenie opäť zmení konfiguráciu telesa. V realite sa tento vzájomný účinok deje kontinuálne až po konečný ustálený stav alebo po konečný čas nestacionárneho procesu. Z toho teda pri numerickej metóde vyplýva potreba diskretnej (krokovej) interpolácie s postupnou zmenou Eulerovskej siete fluidnej oblasti a s kontrolou jej kvality z hľadiska presnosti výsledkov. V programe Ansys, ako uvidíme, možno meniť sieť fluidnej oblasti v závislosti od zmeny mechaniskej časti (*morphing*) v takomto procese v každom zaťažovacom kroku numerického riešenia.

23.3.1 Riešenie jednosmerne zviazanej úlohy pomocou fyzikálnych modelov (Physics)

V príklade 23.1 sme ukázali postup pri najjednoduchšej metóde riešenia jednosmerne *objemovo* (vnútorne) zviazaných úloh. Patrí do skupiny metód *prenosu zaťaženia*. Jej princíp spočíva v tom, že sa najprv vytvorí a vyrieši fyzikálna úloha, z ktorej je potrebné preniesť zaťaženie (v uvedenom príklade to bola úloha ustáleného vedenia tepla). Potom sa vytvorí kompletný výpočtový model druhej (zviazanej) úlohy (v uvedenom príklade statická pevnostná úloha poddajného telesa) s totožnou polohou uzlových bodov modelu, na ktorú sa preniesie zaťaženie z výsledkovej databázy prvej úlohy (v uvedenom príklade objemové zaťaženie poľom uzlových teplôt) a jej riešenie dáva hľadaný výsledok zviazanej úlohy. Totožnosť uzlových bodov i celej prvkovej siete sa dosiahne jednoduchou zmenou typu elementu výpočtového modelu prvej úlohy na partnerský typ elementu druhej, zviazanej úlohy.

Pre zložitejšie úlohy (väčší počet zviazaných polí ako dve, potreba viacnásobného prenosu zaťaženia pri obojstrannej väzbe alebo viacnásobnej väzbe, geometricky zviazané oblasti, významná zmena polohy a tvaru oblastí s potrebnou iteráciou prenosu zaťaženia) sa uvedená metodika zovšeobecnila a zdokonalila do formy metódy prenosu zaťaženia *zviazaných fyzikálnych modelov (Load Transfer Coupled Physics Method)*.

Základné zásady použitia tejto metodiky v programe Ansys sú tieto:

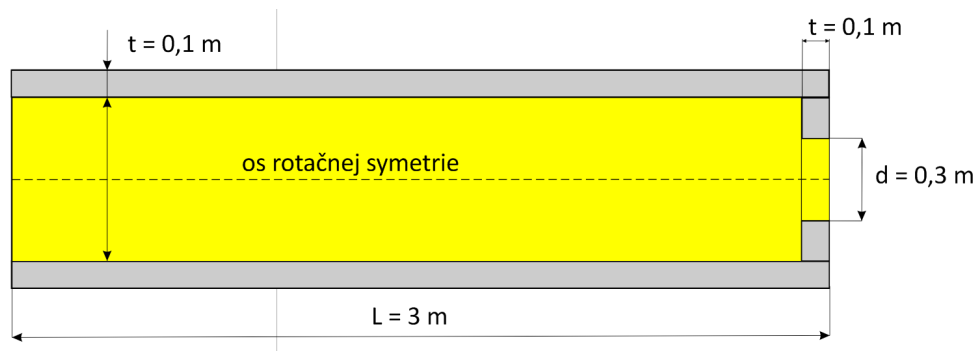
- Zadajú sa typy prvkov pre všetky fyzikálne modely (príkaz *ET*)
- Vytvorí sa geometrický model úlohy (objemy, plochy) zohľadňujúci polohu, tvar a rozmery všetkých zviazaných oblastí a priradí sa im príslušný typ prvku (resp. prvkov pri objemovej väzbe) príkazmi *Mesh Attributes*
- Zadá sa vhodná hustota delenia (príkazy *Size Cntrls*) všetkých oblastí, vytvorí sa kompatibilná sieť prvkov a uzlov (príkazy *Meshing*), ktorá potom slúži na tvorbu jednotlivých fyzikálnych modelov.
- Vytvorí sa potrebné fyzikálne modely zviazanej úlohy týmto postupom:
 - príkazom *ET*, číslo typu prvku, *O* sa urobí neaktívne všetky typy prvkov okrem toho, ktorý je správny pre príslušný fyzikálny model. Pre tento typ sa zadajú jeho potrebné charakteristiky (*Options*).
 - ďalej sa postupuje rovnako, ako by sme s daným prvkom riešili nezviazanú úlohu, t.j. zadajú sa materiálové vlastnosti, okrajové podmienky a zaťaženia (samozrejme zatiaľ okrem zaťaženia od zviazaných fyzikálnych modelov) a všetky ostatné potrebné údaje okrem štartu riešenia
 - Príkazmi *Physics* sa fyzikálny model pod vhodným názvom uloží na disk a vymaže z operačnej pamäti, aby nedošlo ku kolízii s ďalším fyzikálnym modelom, ktorý sa tvorí rovnakým postupom
- Načíta sa (*Physics*) fyzikálny model, ktorý je prvý v reťazci odovzdávania zviazaných zaťažení. Urobí sa aktívnym len jeho typ prvku (príkaz *ET*) a príkazom *Solve* sa vykoná výpočet s následnou kontrolou výsledkov a s prípadným opakovaním výpočtu po oprave alebo úprave parametrov fyzikálneho modelu a riadiacich parametrov výpočtu
- Vynuluje sa predchádzajúci fyzikálny model (*Physics*), načíta sa ďalší, pri ktorom sa postupuje rovnako ako v predchádzajúcom bode, až na to, že z výsledkového súboru (súborov) prechádzajúceho výpočtu (výpočtov) sa načítajú pred výpočtom aj zaťaženia zo zviazaných fyzikálnych modelov (príkaz *LDREAD*). Koncové prípony výsledkových súborov jednotlivých fyzikálnych modelov sú
 - . RFL fluidná úloha
 - . RTH termálna
 - . RMG elektromagnetická
 - . RST všetky ostatné

Pri nelineárnych a nestacionárnych úlohách sa pri načítavaní zviazaného zaťaženia zohľadňuje príslušný zaťažovací, resp. časový krok.

Príklad 23.4

V časti betónovej rúry s rozmermi podľa obrázku prúdi voda s konštantnou vstupnou rýchlosťou 1 m/s. Na výstupe do atmosférického tlaku je prierez zúžený betónovým prstencom pevne spojeným s rúrou. Je potrebné zistiť veľkosť a rozdelenie tlaku prúdiacej

vody na prstenec a rúru v tomto mieste a posúdiť ich namáhanie (napätosť). Zaťaženie od vlastnej tiaže prstenca a vody možno zanedbať. Hustota vody je 1000 kg/m^3 a viskozita $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Modul pružnosti betónu je $2,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ a Poissonovo číslo je 0,2.



Riešenie

Ide o interné ustálené prúdenie kvapaliny v tuhom potrubí, ktorého deformácia nemôže významne ovplyvniť fluidnú oblasť. Úloha je takto jednosmerne ziazaná, treba vyriešiť fluidnú úlohu a tlakové zaťaženie od prúdenia preniesť na betónové teleso. Úlohu sme v prostredí programu Ansys vyriešili pomocou opísanej metodiky fyzikálnych modelov týmito interaktívnymi príkazmi:

1. Zadanie typu použitých prvkov

Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Flotren CFD, 2D Flotran 141, OK, Add, Solid, Quad 4 node 182, OK, Close;

2. Vytvorenie tvoriacich plôch fluidnej oblasti a rúry kanála

Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions,

X1=0, X2=0.15,

Y1=0, Y2=4, Apply,

X1=0, X2=0.3,

Y1=0, Y2=4, Apply,

X1=0, X2=0.4,

Y1=0, Y2=4, Apply,

X1=0, X2=0.4,

Y1=3.9, Y2=4, OK;

Modeling, Operate, Booleans, Partition, Areas, Pick All;

3. Farebné označenie vytvorených plôch

PlotCtrls, Numbering, Area=ON, /NUM=Colors only, OK;

4. Zvolíme pohľad na vodorovnú polohu kanála a znázorníme vytvorené plochy

PlotCtrls, View Settings, Angle of Rotation, THETA=-90, OK;



5. Priradenie typu elementu plochám

Meshing, Mesh Attributes, Picked Areas, kliknite postupne tri plochy fluidnej oblasti (dve horné dlhé a hornú krátku), OK, TYPE= 1 Fluid 141, Apply, kliknite tri tvoriace plochy rúry kanála, OK, TYPE= 2 PLANE 182,OK;

6. Zadanie hustoty siete prvkov na čiarach plôch

Plot, Lines

Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Lines, Picked Lines, Vyznačte postupne všetky krátke čiary na pravej i ľavej strane oblasti, OK, NDIV=10, Apply, Vyznačte postupne štyri dlhé čiary, OK, NDIV=100, SPACE=0.2, OK;

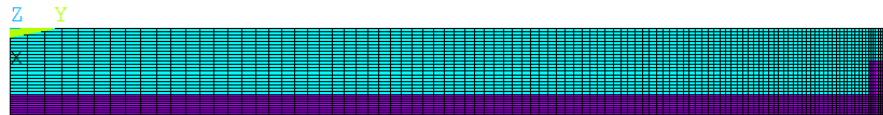
7. Vytvorenie siete prvkov

Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;

8. Nakreslenie a kontrola priradenia ich typu

PlotCtrls, Numbering, Elem/Attrib Numbering = Element type num, OK;

Plot, Elements;



9. Vynulovanie mechanických prvkov a vytvorenie fluidnej úlohy (Physics = fluid)

Napište do príkazového riadku ET,2,0 a potvrdte s ENTER;

Element Type, Add/Edit/Delete, (Type 1 Fluid 141) Options, K3 = Axisymm about Y, OK, Close;

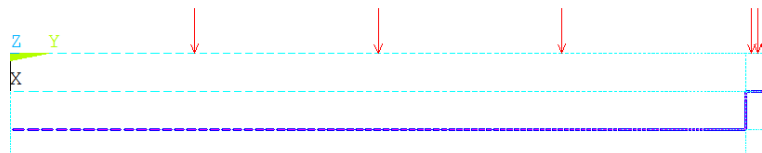
Flotran Set Up, Solution Options, TURB = Turbulent, OK;

Execution Ctrl, Global iterations = 150, OK;

Fluid properties, OK, Density = 1000, Viscosity = 0.0005, OK;

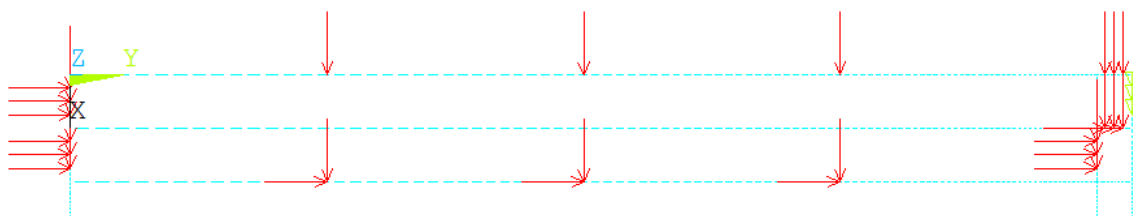
Plot, Lines;

Solution, Define, Loads, Apply, Fluid/CFD, Velocity, On Lines, Vyznačte dve horné čiary na osi rotácie, VX=0, OK, On Lines, Vyznačte tri čiary zvyšného obrysu fluidnej oblasti mimo vstupu a výstupu,



OK, VX=0, VY=0, OK, On Lines, Vyznačte dve čiary vstupu, OK, VX=0, VY=1.0, Pressure DOF, On Lines, Vyznačte čiaru výstupu, OK, PRES = 0, OK;

Physics, Environment, Write, Title = fluid, Fname = fluid, OK;



10. Vynulovanie fluidnej úlohy a fluidných prvkov, vytvorenie mechanickej úlohy (Physics = rura) a jej uloženie do pracovného adresára

Physics, Environment, Clear, OK;

Príkazový riadok: ET, 1, 0, Enter; ET, 2, 182, Enter;

Element Type, Add/Edit/Delete, Type 2 Plane 182, Options, K3 = Axisymmetric, OK, Close;

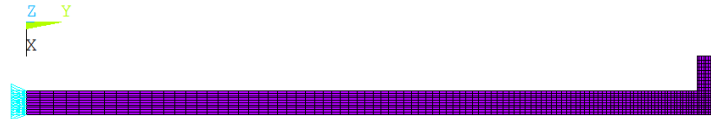
Material Props, Material Models, Favorites, Linear static, Linear isotropic, EX=2.6e10, PRXY=0.2, OK, Material, Exit;

Plot, Lines;

Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Lines, Kliknite krátku zvislú čiaru telesa rúry na ľavej strane, OK, UY, VALUE=0, OK;

Physics, Environment, Write, Title = rura, Fname=rura, OK;

Plot, Elements;



11. Výpočet fluidnej úlohy

Physics, Environment, Clear, OK;

Physics, Environment, Read, fluid, OK;

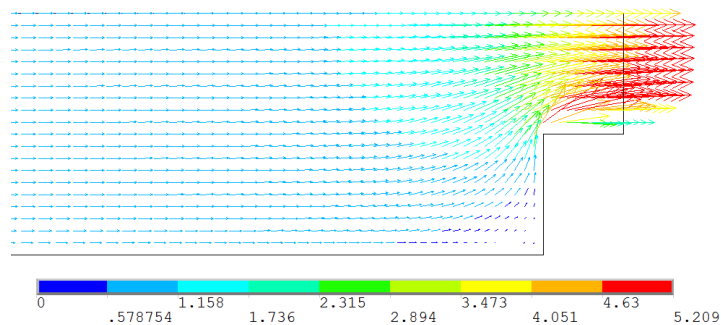
Plot, Elements;

Solution, Run FLOTRAN;

12. Znázornenie rýchlosti prúdenia [m/s]

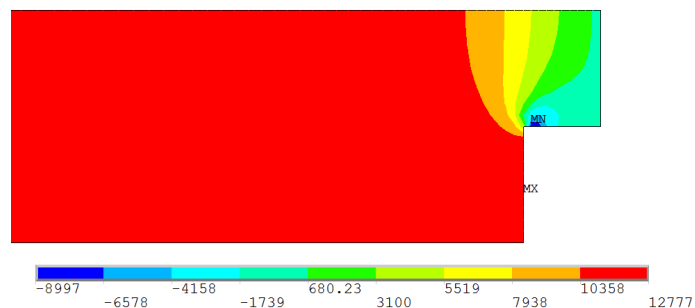
General Postproc, Read Results, Last set;

Plot Results, Vector Plot, Predefined, OK, Zväčšite oblasť výstupu;



13. Znázornenie tlaku [Pa]

Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, DOF Solution, Pressure, Scale Factor = True Scale, OK;



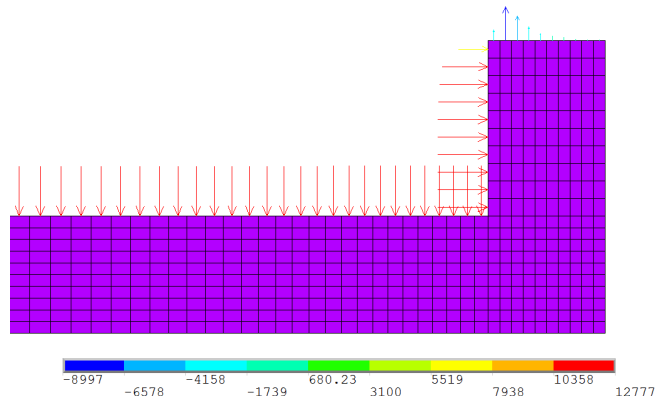
14. Načítanie mechanickej úlohy, zadanie tlaku z fluidnej úlohy a výpočet

Physics, Environment, Clear, OK;

Physics, Environment, Read, rura, OK;

Plot, Elements;

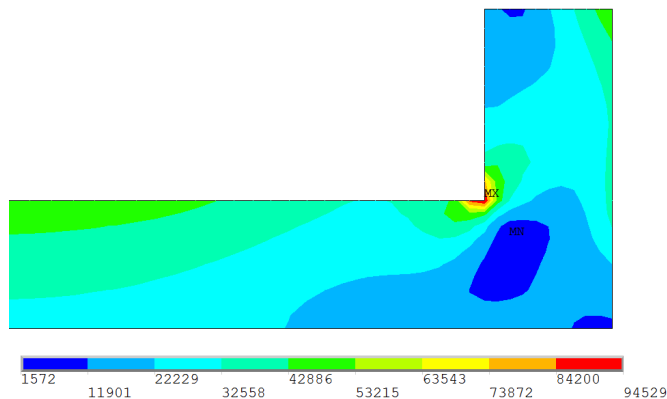
Solution, Define Loads, Apply, Pressure, From Fluid Analy, Load step = LAST, substep no.=LAST, Fname = file.rfl, OK;
Preprocessor, PlotCtrls, Symbols, Show press and convect as, Arrows, OK;



Solve, Current LS, OK;

15. Znáznorenie von Misesovho redukovaného napätia [Pa]

General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Stress, von Mises, Scale Factor = True Scale, OK;



Poznámka k príkladu

Príklad má predovšetkým metodický účel – ukazuje postup riešenie jednosmerne zviazanej fluidno-mechanickej úlohy pomocou tvorby fyzikálnych modelov zdieľajúcich spoločnú geometrickú a sieťovú databázu. Vzhľadom na prácnosť opisu interaktívneho postupu výpočtu sa zvolil čo najjednoduchší tvar oblastí. Na obrázku redukovaného (porovnávacieho) von Misesovho napätia vidieť, že v ostrom prechode rúry do koncového prstenca dochádza ku koncentrácii napätia i keď maximálne napätie je tam zdanlivo malé. Každý skúsenejší užívateľ MKP však vie, že táto hodnota je v tzv. singulárnom bode (nulový polomer zaoblenia vrubu) nerealistická, teoreticky nekonečne veľká, dochádzalo by k jej narastaniu pri zhusťovaní siete v tomto mieste. Takéto miesto si vyžaduje vhodné zaoblenie, ktoré sme nepoužili kvôli zjednodušeniu tvorby siete prvkov.

23.3.2 Riešenie obojsmerne zviazanej úlohy pomocou fyzikálnych modelov (Physics)

Pri niektorých zviazaných fluidno-mechanických úlohách dochádza k takej veľkej deformačnej zmene mechanického modelu (telesa) od síl prúdenia, že táto zmena významne ovplyvňuje pomery vo zviazanom fluidnom poli. V takom prípade ide o obojsmernú väzbu

týchto polí, ktorá vyžaduje následnú úpravu hranice fluidnej oblasti i jej prvkovej siete a opakované iteračné vykonávanie výpočtu až po ustálenie polohy deformovaných častí.

Riešenie takejto úlohy v programe Ansys pomocou fyzikálnych modelov so spoločnou databázou je analogické s postupom uvedenom v predchádzajúcej časti s niektorými špeciálnymi zmenami a doplnkami.

Prvou je spomínaná zmena hranice a siete fluidných prvkov tak, aby sa prispôbili nezanedbateľnej deformácii mechanického modelu (*mesh morphing*). Uskutočňuje sa pomocou príkazov *DAMORPH* (uprav sieť prvkov na vyselektovanej ploche) a *DVMORPH* (uprav sieť prvkov na vyselektovanom objeme) s možnosťou troch volieb

- *Morphing* – program posunie uzly a s nimi spojené prvky fluidného poľa tak, aby boli kompatibilné s deformovanou sieťou mechanického poľa (telesa)
- *Remeshing* – program odstráni sieť fluidného poľa a nahradí ju novou, ktorá je kompatibilná s deformovanou sieťou mechanického poľa
- *Morphing or Remeshing* - program najprv vykoná *Morphing* a ak zlyhá, pre neprípustnú degeneráciu tvaru prvkov, tak vykoná *Remeshing*

Ďalšou charakteristikou riešenia takejto úlohy je iteračný cyklus, ktorý s dostatočnou presnosťou nájde rovnovážny stav deformácie telesa účinkom fluidných síl a jemu prislúchajúce riešenie parametrov prúdenia v konečnom tvare fluidnej oblasti. Potreba takého procesu vyplýva z toho, že pri prvom kroku uvedeného cyklu pôsobia fluidné sily na nedeformované „mäkké“ teleso alebo prekážku (nereálnou) väčšou silou ako na deformovanú polohu vyvolanú účinkom týchto síl.

Deformácia telesa pri obojsmernej fluidno-mechanickej úlohe skoro vždy patrí do kategórie veľkých deformácií, takže aj hľadanie deformácie takéhoto telesa je nelineárna úloha. Navyše táto úloha sa z uvedených dôvodov rieši opakovane v cykle hľadania konečnej polohy telesa s ohľadom na pôsobenie fluidných síl, ktoré sa menia pri zmene deformácie telesa. Často sa potom, najmä pri veľkých úlohách, v zaťažovacích krokoch cyklu nerieši nelineárna pevnostná úloha telesa vždy od začiatku, ale sa robí reštart z predchádzajúceho kroku. Reštart potrebuje súbory *EMAT* (obsahujú prvkové matice) a *ESAV* (obsahujú uložené údaje o prvkoch nelineárnej úlohy), ktoré pri zviazanej úlohe so spoločnou databázou treba pre potreby reštartu v spomínanom cykle izolovať pomocou príkazov */ASSIGN* Itakto

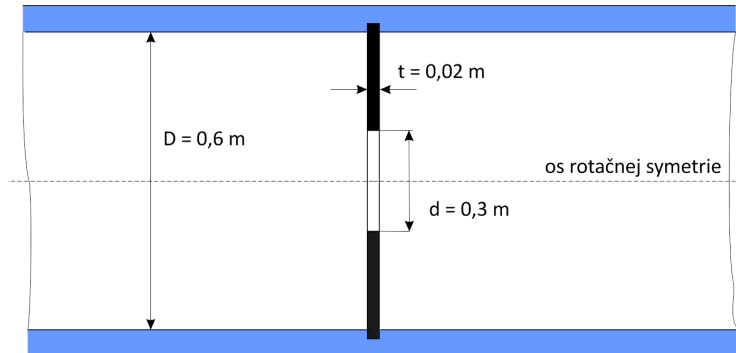
- príkazmi */ASSIGN* sa zabezpečí neprepísanie súborov *EMAT* a *ESAV* pred spustením reštartu nelineárnej mechanickej úlohy
- vykoná sa reštart
- príkazmi */ASSIGN* sa zabezpečí návrat súborov *EMAT* a *ESAV* k pôvodným (databázovým) hodnotám pre ich použitie vo fluidnom fyzikálnom modeli.

Praktickú aplikáciu uvedených postupov pri obojstranne zviazanej fluidno-mechanickej úlohe si ukážeme na príklade.

Príklad 23.5

V ocelevej kruhovej rúre je votknutý gumový prstenec (s rozmermi podľa obrázku), cez ktorý preteká voda. Jej priemerovaná rýchlosť v dostatočnej vzdialenosti pred prstencom je 0,35 m/s. Otvor prstenca má zaoblené hrany poloblúkom s polomerom 0,01 m. Dĺžka rúry pred prstencom nech je 1,5 m a za prstencom 4,5 m. Treba určiť deformáciu tejto gumenej clony a jej napätosť od tlakového účinku prúdiacej vody, ako aj základné charakteristiky

prúdenia v okolí zdeformovanej clony. Hustota vody je 1000 kg/m^3 a viskozita $4,6 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Materiálové konštanty dvojparametrového Mooney-Rivlinovho hyperelastického materiálového modelu clony (pozri 10. kapitolu - Konštitutívne rovnice hyperelastického materiálu) sú: $C_{10} = 293000$, $C_{01} = 177000$, $D_1 = 1,4 \cdot 10^{-9}$.



Riešenie

Ide o interné ústálené prúdenie kvapaliny v tuhom potrubí, ktorého deformácia nemôže významne ovplyvniť fluidnú oblasť a jeho vútorná rotačne symetrická plocha bude tvoriť len pevnú hranicu fluidnej oblasti. Úloha je však obojsmerne ziazaná, pretože relatívne mäkká rotačne symetrická gumová clona sa účinkom tlaku prúdu vody silne zdeformuje a ovplyvní takto aj pomery prúdenia oproti stavu pred jej deformáciou, ako aj tvar a hranicu fluidnej oblasti v okolí clony.

Úloha sa v podstate rieši analogicky ako predchádzajúci príklad, t.j. vytvorí sa spoločná geometrická a prvková databáza s dvomi samostatnými fyzikálnymi modelmi *fluid* a *struc*. Pravda, musíme počítať s *morphingom* prvkovej siete v okolí clony a samozrejme s iteračným cyklom, ktorý nájde dostatočne presnú konečnú deformáciu clony. Takisto treba predpokladať, že deformácia clony bude patriť do kategórie veľkých deformácií a bude treba pri jej riešení zapnúť túto voľbu v jej fyzikálnom modeli.

Pretože interaktívne zadávanie úlohy by bolo veľmi zdĺhavé a náročné na presné užívateľské zopakovanie, vyriešime ju za pomoci logicky členených makier. Význam jednotlivých príkazov v makrách možno nájsť v *Helpe* Ansysu najjednoduchšie tak, že sa v príkazovom riadku vykoná príkaz *HELP*, "názov príkazu", napr. *HELP,LESIZE* (všetko sa môže písať aj malými písmenami). Po spustení každého makra, ktoré je treba spúšťať postupne v poradí, ako ich uvádzame (v jednom behu programu), možno vstúpiť do riešenia úlohy interaktívne a pozrieť si, resp. skontrolovať medzivýsledky. Ako sme už uviedli v predchádzajúcej časti, makro sa vytvorí vo vhodnom editore (napr. *Notepad*) a pod určitým názvom s koncovou príponou *.mac* sa uloží v pracovnom adresári.

Prvé makro sme nazvali *siet.mac*, pretože slúži na vytvorenie siete prvkov pre oba fyzikálne modely:

Makro *siet.mac*

<code>/prep7</code>
<code>shpp,off</code>
<code>et,1,141</code>
<code>et,2,182</code>
<code>/pnum,area,1</code>
<code>/pnum,type,1</code>

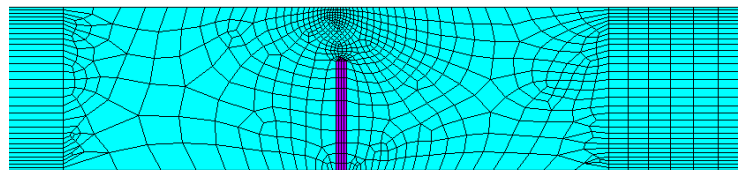
/numb,1
! Tvorba geometrického modelu
rect,0.1,0.3,1.5,1.52
rect,0.,0.3,1.0,2.0
rect,0.,0.3,0.,1.0
rect,0.,0.3,2.0,5.0
aovlap,all
k,22,0.11,1.51
larc,1,4,22,0.011
al,6,4
adel,7
al,6,3,22,7,8,5,21,1
! Zadanie hustoty a zhustovania siete na čiarach
lesize,1,,,10,-2
lesize,2,,,4,0
lesize,3,,,10,-2
lesize,4,,,4,0
lesize,5,,,30,-3
lesize,7,,,30,-3
lesize,9,,,30,-3
lesize,15,,,30,-3
lesize,17,,,8,0.2
lesize,18,,,8,0.2
lesize21,,,20,12
lesize,8,,,50,-0.07
lesize,19,,,30,6
lesize,20,,,30,6
lesize,22,,,20,12
! Označenie plôch pre prvky clony a uloženie plochy pre morphing
asel,s,,,1,2
aatt,2,2,2
asel,s,,,3
cm,area2,area
alist
! Označenie plôch pre fluidné prvky
asel,a,,,5,6
aatt,1,1,1
alls
! Tvorba siete prvkov
eshape,2
asel,u,,,2,3
amesh,all
eshape,0
asel,s,,,2,3
amesh,all
alls
! Otočenie modelu do vodorovnej polohy a znázornenie plôch
/angle,,-90
aplot

Makro *siet.mac* sa po otvorení programu Ansys vykoná po zadaní postupnosti príkazov: Utility Menu, Macro, Execute Macro, Name = *siet*, OK;

Zobrazia sa vytvorené plochy, ktorých rotáciou okolo osi symetrie (os *y*) vznikne fluidná oblasť a teleso clony



Je vidieť plochu v okolí clony, ktorá sa využije na *Morphing*. Vzhľadom na jej zložitejší tvar sa v tejto oblasti musela urobiť zmiešaná trojuholníková a štvoruholníková sieť prvkov. Možno ju znázorniť príkazmi: Utility Menu, Plot, Elements;



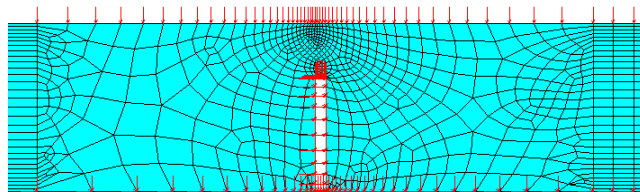
Druhé makro s názvom *fmodel.mac* slúži na vytvorenie fluidného modelu a jeho zapísanie na disk. Spúšťa sa nadväzne po makre *siet*.

Makro *fmodel.mac*

<code>et,1,141</code>
<code>et,2,0 ! Deaktivácia prvkov clony</code>
<code>keyopt,1,3,1 ! Rotačne symetrické fluidné prvky</code>
<code>vin=3.5e-1 ! Vstupná rýchlosť vody</code>
<code>! Charakteristiky prúdenia a vlastnosti vody</code>
<code>flda,solu,flow,1</code>
<code>flda,solu,turb,1</code>
<code>flda,iter,exec,300</code>
<code>flda,outp,sumf,10</code>
<code>flda,prot,dens,constant</code>
<code>flda,prot,visc,constant</code>
<code>flda,nomi,dens,1000.</code>
<code>flda,nomi,visc,4.6e-4</code>
<code>! Okrajové podmienky pre rýchlosť na čiarach fluidnej oblasti</code>
<code>lsel,s,,,8,17,9</code>
<code>lsel,a,,,20</code>
<code>dl,all,,vx,0.,1</code>
<code>lsel,s,,,9</code>
<code>dl,all,,vx,0.,1</code>
<code>dl,all,,vy,vin,1 ! Rýchlosť na vstupe</code>
<code>lsel,s,,,2</code>
<code>lsel,a,,,18,19</code>
<code>lsel,a,,,21,22</code>
<code>dl,all,,vx,0.,1</code>
<code>dl,all,,vy,0.,1</code>
<code>lsel,s,,,1,3,2</code>
<code>lsel,a,,,6</code>

<code>dl,all,,vx,0.,1</code>
<code>dl,all,,vy,0.,1</code>
<code>! Okrajová podmienka pre tlak na výstupe</code>
<code>lsel,s,,,15</code>
<code>dl,15,,pres,0.,1</code>
<code>alls</code>
<code>! Zápis fluidného fyzikálneho modelu na disk pod názvom fluid</code>
<code>physics,write,fluid,fluid</code>

Po vykonaní makra sa sieť zobrazí s vyznačenými okrajovými podmienkami pre rýchlosť a tlak (nulový na výstupe). Sieť okolo clony je



Tretie makro nazvané *gmodel.mac* vytvorí fyzikálny model gumenej clony a zapíše ho na disk:

Makro *gmodel.mac*

<code>physics,clear</code> !Vymazanie fluidného modelu z operačnej pamäti
<code>et,1,0</code> ! Deaktivácia fluidných prvkov
<code>et,2,182</code> ! Aktivácia pevnostných prvkov clony
<code>keyopt,2,3,1</code> ! axisym
<code>keyopt,2,3,2</code>
<code>keyopt,2,6,1</code>
<code>keyopt,2,1,2</code>
<code>! Zadanie vlastností gumy</code>
<code>tb,hyper,2,,2,mooney</code>
<code>tbdata,1,0.293e7,0.177e7, (1.0-2.0*0.49967)/(0.293e7+0.177e7)</code>
<code>! Votknutie vonkajšieho obvodu clony</code>
<code>lsel,s,,,2</code>
<code>nsll,,1</code>
<code>d,all,ux,0.</code>
<code>d,all,uy,0.</code>
<code>alls</code>
<code>finish</code>
<code>! Údaje pre pevnostnú úlohu</code>
<code>/solu</code>
<code>antype,static</code>
<code>nlgeom,on</code>
<code>cnvtol,f,,,,-1</code>
<code>! Zápis mechanického modelu na disk pod názvom struc</code>
<code>physics,write,struct,struct</code>
<code>eplot</code> ! Nakreslenie siete prvkov clony
<code>physics,clear</code> !Vymazanie mechanického modelu z operačnej pamäti
<code>save</code> ! Uloženie spoločnej databázy modelov

Po vykonaní makra sa zobrazí sieť prvkov gumovej clony aj s vyznačením votknutia (kvôli úspore miesta sme ju zobrazili vo vodorovnej polohe).



Posledné výpočtové makro *cyklus.mac* vykoná vlastný nelineárny výpočet úlohy. V cykle načíta fluidný model a vyrieši fluidnú úlohu pre vstupnú polohu clony a zaťaží clonu prvotným tlakom vody. Následný nelineárny pevnostný výpočet clony stanoví jej prvú zdeformovanú polohu, podľa ktorej sa *morphingom* upraví tvar a sieť fluidných prvkov v okolí clony. Spustí sa opäť fluidný výpočet a proces sa v cykloch opakuje, až po doiahnutie zanedbateľných zmien polohy clony. Počet iteračných cyklov sme stanovili na desať.

Makro *cyklus.mac*

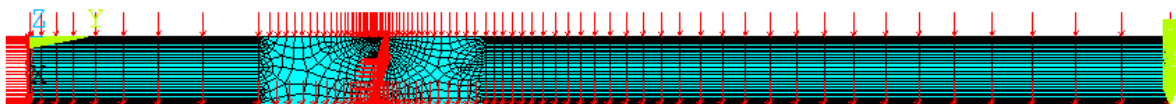
<code>*do,i,1,10 !Začiatok desiatich krokov cyklu</code>
<code>/solu</code>
<code>physics,read,fluid ! Načítaj fluidný fyzikálny model</code>
<code>*if,i,ne,1,then ! Po prvom kroku už stačí len 100 iterácií v kroku</code>
<code>flda,iter,exec,100</code>
<code>*endif</code>
<code>solve ! Vykonaj prvý krok riešenia fluidnej úlohy</code>
<code>fini</code>
<code>/prep7</code>
<code>physics,read,struc ! Načítaj mechanický model do operačnej pamäti</code>
<code>! Príprava reštartu mechanickej úlohy</code>
<code>/assign,esave,struc,esav</code>
<code>/assign,emat,struc,emat</code>
<code>! Po prvom kroku už rob len reštart</code>
<code>*if,i,gt,1,then</code>
<code>parsave,all</code>
<code>resume</code>
<code>parresume</code>
<code>/prep7</code>
<code>antype,stat,rest</code>
<code>fini</code>
<code>*endif</code>
<code>! Načítaj tlak na clonu z fluidnej úlohy</code>
<code>/solu</code>
<code>solc,off</code>
<code>lsel,s,,1,3,2</code>
<code>lsel,a,,6</code>
<code>nsll,,1</code>
<code>esel,s,type,,2</code>
<code>ldread,pres,last,,,,,rfl</code>
<code>sfelist</code>
<code>alls</code>
<code>rescontrol,,none</code>
<code>! Rieš mechanicú úlohu</code>
<code>solve</code>

```

*if, i, eq, 1, then
save
*endif
fini
! Vykonaj morphing siete na ploche v okolí clony
/prep7
damorph, area2, , 2
fini
alls
! Vráť sa k pôvodnej databáze prvkových hodnôt
/assign, esav
/assign, emat
*enddo ! Koniec cyklu
save
finish
! Príprava na interaktívnu kontrolu výsledkov prúdenia
/angle, , -90
physics, read, fluid
eplot

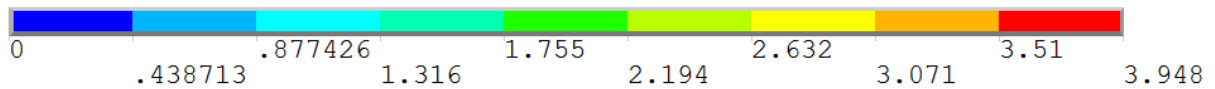
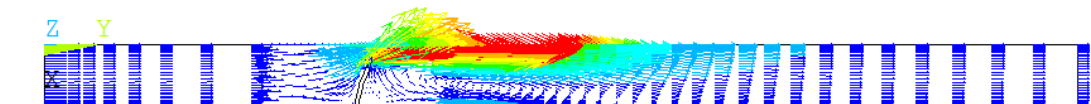
```

Po prebehnutí výpočtu sa znázorní fluidný model

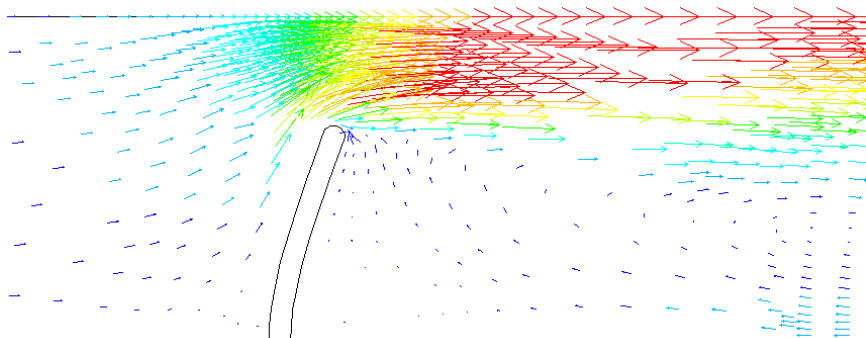


a možno si pozrieť niektoré výsledky výpočtu.

Príkazy na vektorové znázornenie rýchlosti prúdenia sú [m/s]:
General Postproc, Read Results, Last Set;
Plot Results, Vector Plot, Predefined, OK;

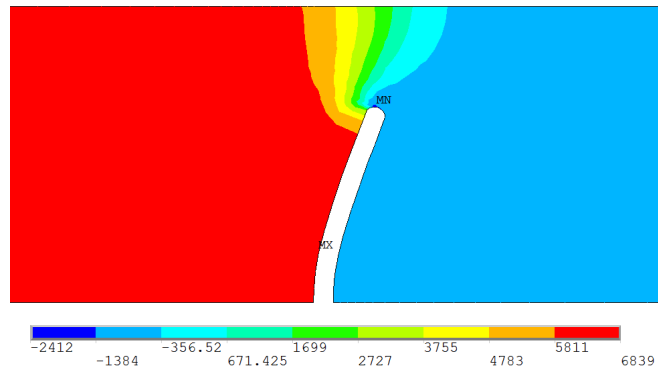


Zväčšené okolie clony



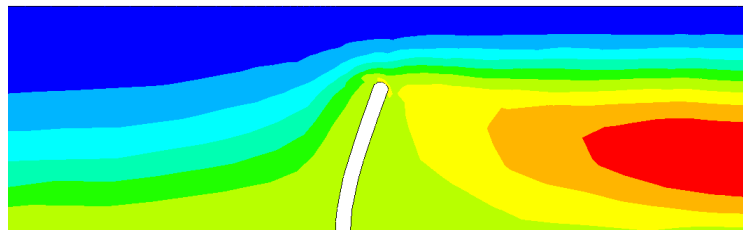
Znázornenie tlaku [Pa]

Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, DOF Solution, Pressure, OK;



Prúdnice

Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Other FLOTRAN Quantities, Stream Function – 2D, OK;

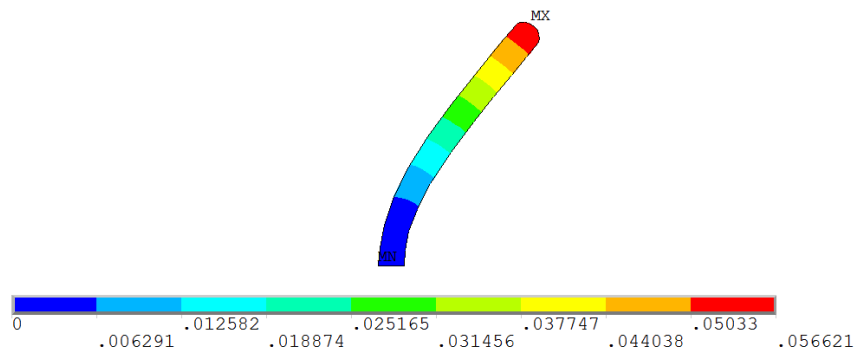


Deformácia clony [m]

Preprocessor, Physics, Environment, Read, Struc;

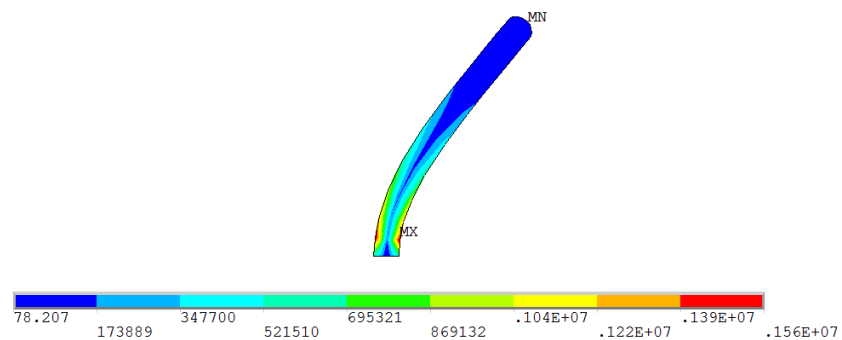
General Postproc, Read Results, Last Set;

Plot Results, Nodal Solu, Nodal Solution, DOF Solution, Displacement vector sum, OK;



Napätie v clone [Pa]

Plot Results, Nodal Solu, Stress, von Mises stress, OK;



Poznámka k príkladu

Pri použití Flotranu na riešenie fluidnej úlohy v programe Ansys sa výsledky zapíšu do súboru *Názov úlohy.rfl* (v tomto príklade *file.rfl*). Pokiaľ vo fluidnom modeli urobíme nejaké zmeny a spustíme výpočet, tak sa tento súbor automaticky neprepiše novými výsledkami (ako pri iných typoch úloh), ale riešenie nadväzuje na predchádzajúce iteračné kroky. Ak chceme výpočet zopakovať od začiatku, musíme tento súbor z pracovného adresára vymazať, alebo nastaviť vo *FLOTRAN Set Up* reštart úlohy od iterácie číslo 1.

Literatúra

[1] Y. Bazilevs, K. Takizawa, T.E. Tezduyar: *Computational Fluid – Structure Interaction (Methods and Applications)*, Wiley, 2013