

Kap. 26 Výpočtové postupy MKP v akustike

Akustika je náuka o zvuku. Zaoberá sa jeho vznikom (jeho zdrojmi), jeho šírením v plynoch, kvapalinách a tuhých telesách, jeho interakciou s látkou a jeho ľudským vnímaním. Ľudské ucho je schopné vnímať zvuk s frekvenciou zhruba od 16 do 20000 Hertzov. Nižšie hodnoty zvukových frekvencií sa označujú infrazvuk a vyššie ultrazvuk. Akustické vlnenie je šírenie zmien akustického tlaku prostredím. V tekutinách (t.j. v plynoch a kvapalinách) sa jedná o pozdĺžne vlnenie (častice kmitajú v smere postupu vlnenia). V pevných látkach sa šíria vlny pozdĺžne i priečne.

Akustika sa delí na niekoľko špecializovaných častí:

- Teoretická akustika s analytickou a numerickou analýzou zvukových vln
- Kmitanie telies ako zdroj zvukových vln, interakcia zvukového vlnenia s telesom (konštrukciou)
- Vyšetrovanie nelineárnych zvukových efektov (sonický tresk, explózia a pod.)
- Šírenie zvuku pod vodnou hladinou, sonar, seizmické efekty
- Ultrazvuk, nedeštruktívne skúšky materiálov, lekárske aplikácie
- Analýza zdrojov hluku a spôsobov protihlukovej ochrany
- Stavebná akustika – odhad, plánovanie, analýza šírenia sa zvukových vln v stavebných priestoroch
- Elektroakustika zvukových prevodníkov (reproduktory, mikrofóny, záznamové a signálové systémy)
- Hudobná akustika – analýza zvukov a ich interakcie s ohľadom na potreby hudby
- Fyziologická akustika – analýza vzniku a vnímania zvuku v ľudských zvukových orgánoch

Budeme sa zaoberať len výpočtovými postupmi MKP spadajúcimi do prvých dvoch uvedených špeciálnych oblastí akustiky s tým, že sa predpokladá elementárna znalosť základných pojmov z fyziky o vlnení. Treba však povedať, že tieto postupy sú základom numerických analýz aj vo väčšine ostatných uvedených špeciálnych oblastiach. Tiež treba upozorniť na fakt, že niektoré základné diferenciálne rovnice akustiky a dynamiky telies (ale i vlnenia v iných oblastiach fyziky) sú formálne zhodné, z čoho vyplýva množstvo analogií medzi pojmami i metódami riešenia úloh v týchto oblastiach. Pre tých, ktorí ovládajú výpočtové postupy MKP používané pri analýze kmitania telies (napr. [1]), bude iste zaujímavé pozorovať silnú analógiu s rovnicami a analýzou akustických vln. Využívajú sa pri tom formálne rovnaké výpočtové vzťahy a postupy, pravda, s určitými rozdielmi pri zadávaní vstupných hodnôt, budiacich „síl“ a najmä okrajových podmienok.

Niektoré základné pojmy z akustiky

Pod pojmom zvuk rozumieme zmeny akustického tlaku p' , superponované na tlak prostredia p_0 , ktoré sa šíria prostredím ako vlna a ktoré sme schopní sluchom vnímať. Pre objektívne hodnotenie zvuku sa zaviedla veličina s názvom *intenzita zvuku* I , ktorá je definovaná ako podiel akustického výkonu P a plochy S , ktorou vlnenie prechádza

$$I = \frac{P}{S} \quad [\text{W/m}^2] \quad (26.1)$$

Intenzita zvuku je teda priamo úmerná energii prenášanej vlnou, ktorá závisí od druhej mocniny amplitúdy tlaku a od druhej mocniny frekvencie. Ľudské ucho je schopné vnímať intenzitu zvuku od prahu počuteľnosti ($I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, resp. od akustického tlaku $p' = 20 \text{ } \mu\text{Pa}$) až po prah bolesti ($I = 1 \text{ W/m}^2$, resp. akustický tlak 130 Pa), čo je v jednotkách intenzity zvuku veľmi veľký a pre bežné používanie nepraktický rozsah (pomer najväčšej a najmenšej intenzity je 10^{12}). Zaviedla sa preto aj

ďalšia miera L_I s názvom *hladina intenzity (hlasitosti) zvuku* s jednotkou *bel* [B], ktorá vyjadruje intenzitu zvuku v logaritmickej stupnici (v angličtine *sound intensity level, SIL*)

$$L_I = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \text{ [dB]} \quad (26.2)$$

kde násobok 10 prepočítava túto hodnotu na decibely, čo je dostatočne podrobná hodnota pre zaregistrovanie jej zmeny ľudským sluchom. Analogicky možno túto veličinu vyjadriť pomocou tlaku, potom má názov *hladina akustického tlaku* L_p (v angličtine *sound pressure level, SPL*)

$$L_p = 10 \log_{10} \left(\frac{p'_{rms}}{p_0} \right)^2 = 20 \log_{10} \frac{p'_{rms}}{p_0} \text{ [dB]} \quad (26.3)$$

kde p'_{rms} je efektívna hodnota tlaku p' a $p_0 = 20 \mu\text{Pa}$ je referenčný tlak (prah počuteľnosti).

Príklady intenzity zvuku:

prah počuteľnosti 0 dB

šepot 20 dB

ticho hrajúce rádio 40 dB

konverzačná reč 60 dB

hlasitá reč 80 dB

pneumatické kladivo 140 dB

prah bolesti (intenzita, kedy začíname zvuk vnímať jako bolesť) 140 db

Ďalším dôležitým pojmom je *merná akustická impedancia* Z_0 , ktorá vyjadruje pomer medzi akustickým tlakom a zložkou rýchlosti v smere kmitajúcej častice zvukovej vlny v určitom bode prostredia (nositeľa zvukových vln)

$$Z_0 = \frac{p'}{v} \text{ [Pa} \cdot \text{s/m]} \quad (26.4)$$

Pretože p' i v sa vo všeobecnosti (i v programoch MKP) vyjadrujú vo forme komplexných čísiel, aj akustická impedancia vo všeobecnosti je komplexné číslo. Merná akustická impedancia (resp. reálna časť jej hodnoty) udáva odpor, ktorý kladie médium šíreniu sa zvukovej vlny a závisí od vlastností média a typu zvukovej vlny. Pre rovinnú zvukovú vlnu platí vzťah, ktorý jasnejšie poukazuje na to, ako merná akustická impedancia (v tomto prípade často nazývaná aj *charakteristická impedancia*) závisí od vlastností média

$$Z_0 = \rho_0 c_0 \quad (26.5)$$

kde $\rho_0 c_0$ je súčin hustoty a rýchlosti zvuku v danom prostredí. Vyplýva z toho, že prostredie s vysokou hustotou a vysokou rýchlosťou šírenia zvukových vln vykazuje vysoký akustický odpor. A naopak, pri malých hodnotách ρ_0 a c_0 , má akustické prostredie malý akustický odpor a podľa (26.4) aj malé efektívne hodnoty tlaku môžu vyvolať vysokú rýchlosť zvukového vlnenia. Je tiež zrejmé, že akustická impedancia závisí od teploty, pretože ako hustota, tak aj rýchlosť zvuku sa s teplotou mení.

Vzhľadom na uvedené je zrejmé, že napr. veľkosti charakteristickej akustickej impedancie vzduchu a vody budú výrazne odlišné. Pri teplote 20°C sú to hodnoty

vzduch: $Z_0 = \rho_0 \cdot c_0 = 1,21 \cdot 343 = 415 \text{ kg/(s} \cdot \text{m}^2) = 415 \text{ Pa} \cdot \text{s/m} = 0,415 \text{ kPa} \cdot \text{s/m}$

voda: $Z_0 = \rho_0 \cdot c_0 = 1000 \cdot 1480 = 1480 \cdot 10^3 \text{ kg/(s} \cdot \text{m}^2) = 1480 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s/m} = 1480 \text{ kPa} \cdot \text{s/m}$

Mernú akustickú impedanciu Z_0 treba rozlišovať od pojmu *akustická impedancia* Z s definíciou

$$Z = \frac{p'}{vS} = \frac{Z_0}{S} \quad [\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^3] \quad (26.6)$$

Je to pomer akustického tlaku na ploche S k objemovému zvukovému toku cez túto plochu. S touto impedanciou sa stretávame v prípadoch, keď jej hodnota nezávisí len od vlastností prostredia, ale aj od tvaru vyšetrovanej oblasti (dychové nástroje, kanály, dutiny, rúry).

Pri riešení akustických úloh pomocou MKP sa merná akustická impedancia prostredia zadáva priamo udaním hmotnosti a rýchlosti zvuku a s oboma impedanciami sa stretávame tiež pri zadávaní okrajových podmienok. Určitú komplikáciu pri zadávaní i vyhodnocovaní akustickej impedancie spôsobuje to, že akustický tlak a rýchlosť zvukovej častice bývajú často fázovo posunuté, čo spôsobuje fázové posunutie viacerých akustických veličín, vrátane impedancie. Rieši sa to komplexnou reprezentáciou hodnôt týchto veličín, pričom obvykle reálna časť reprezentuje sfázovanú zložku a imaginárna časť zložku mimo fázy.

Pri šírení prostredím zvuková vlna môže naraziť na prekážku, prípadne prechádzať do iného prostredia. Pri kolízii s prekážkou (ktorú zvuk nemôže obísť) sa časť zvukovej energie odrazí a časť absorbuje materiál prekážky. Akustické vlastnosti prekážky (steny) z tohto hľadiska možno vyjadriť pomocou *koeficientu absorpcie zvuku*

$$\alpha = \frac{I_{\text{absorb}}}{I} \quad (26.7)$$

kde $I = I_{\text{absorb}} + I_{\text{refl}}$ je intenzita zvuku dopadajúceho na prekážku, I_{absorb} je intenzita pohlteneho a prenášaného zvuku a I_{refl} intenzita odrazeného zvuku. Koeficient absorpcie zvuku sa určuje experimentálne a je silne závislý od frekvencie. So zvyšovaním frekvencie sa jeho hodnota zvyšuje. Niektoré jeho hodnoty pre frekvenciu 500 Hz sú: betón 0,015; stena obytnej miestnosti 0,025; sklo 0,027; drevené parkety 0,07; hrubý koberec na betóne 0,14; priemyselné zvukovoizolačné materiály 0,6 – 0,8; otvorené okno 1,0.

Pri prechode zvukovej vlny cez hranicu dvoch rozdielnych prostredí dochádza tiež k odrazu zvuku. Intenzita odrazeného zvuku závisí od uhla dopadu vlny a od impedancie oboch prostredí. Pokiaľ je smer vlny normálový k hranici (normálový odraz), pre koeficient odrazenej intenzity zvuku platí

$$R_i = \frac{I_{\text{refl}}}{I_{\text{trans}}} = \frac{(Z_{02} - Z_{01})^2}{(Z_{02} + Z_{01})^2} \quad (26.8)$$

kde R_i je *koeficient odrazu intenzity zvuku*, Z_{01} je merná impedancia prostredia prichádzajúcej zvukovej vlny a Z_{02} je impedancia prostredia do ktorého zvuk vchádza a ktoré časť intenzity R (0 až 1) odráža. Možno sa stretnúť aj s *koeficientom odrazu tlaku zvuku* pre ktorý platí

$$R_p = \sqrt{R_i} \quad (26.9)$$

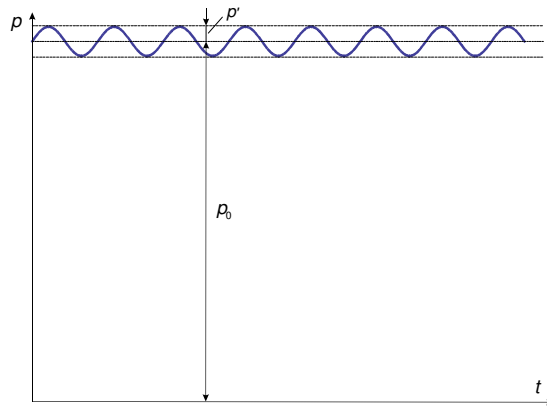
Zo vzorca (26.8) vidieť, že pri malých rozdieloch impedancií je zmena intenzity zvuku pri prechode hranicou prostredí malá (pri rovnakých impedanciách nulová) a naopak.

Vlnové rovnice

Pri formulovaní a riešení akustických problémov sa predpokladá, že akustické vlny v uvažovanom mieste s pravouhlovými priestorovými súradnicami $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$ a v čase t sú charakterizované tlakom $p(\mathbf{x}, t)$, hustotou $\rho(\mathbf{x}, t)$ a rýchlosťou častice média (neviskózne tekutiny) $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Ďalej sa predpokladá, že fluktuácie (zmeny) tlaku $p'(\mathbf{x}, t)$ a hustoty $\rho'(\mathbf{x}, t)$ sú veľmi malé oproti kludovým hodnotám v uvažovanej oblasti p_0 a ρ_0 (obr. 1) a že rýchlosť pohybu častice $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t)$ je veľmi malá oproti rýchlosti zvuku v tekutine c_0 . Takže sa zavádzajú vzťahy

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad p' \ll p_0, \quad \rho' \ll \rho_0, \quad |\mathbf{v}'| \ll c_0 \quad (26.10)$$

Uvažuje sa nulové prúdenie média $|\mathbf{v}_0|=0$.



Obr. 1

Využitím uvedených predpokladov v rovnici kontinuity a pohybovej rovnici média (napr. [1], kap. 20), t.j. zanedbaním súčinov malých veličín, dostaneme linearizovanú rovnicu kontinuity

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (26.11)$$

a linearizovanú pohybovú rovnicu

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' = \mathbf{0} \quad (26.12)$$

Ak rovnicu kontinuity zderivujeme podľa času a pohybovú rovnicu po vynásobení operátorom ∇ od nej odčítame, tak dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' \right) - \nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' \right) = 0$$

a po vyrušení členov s rýchlosťou

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0 \quad (26.13)$$

Do tejto rovnice ešte potrebujeme nájsť vzťah medzi p' a ρ' . Najjednoduchšiu formu tejto závislosti majú tzv. barotropické tekutiny pri ktorých zmena tlaku závisí len od zmeny hustoty

$$p = p(\rho) \quad (26.14)$$

Tento vzťah sa takisto linearizuje rozvinutím do skráteneho radu okolo hodnoty $p(\rho_0) = p_0$

$$p = p_0 + \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) + O((\rho - \rho_0)^2 + \dots) \quad (26.15)$$

Z tejto aproximácie vyplýva

$$p' = p - p_0 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) = c_0^2 \rho' \quad (26.16)$$

kde

$$c_0^2 \approx \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} \quad (26.17)$$

Dosadením (26.16) do (26.13) dostávame *homogénny tvar vlnovej rovnice* (t.j. bez budiacich akustických zdrojov na pravej strane) pre tlakové fluktuácie

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} \quad (26.18)$$

Analogická rovnica platí pre hustotu

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 \rho' = 0 \quad (26.19)$$

Pre rýchlosť častice \mathbf{v}' platí *vektorová* vlnová rovnica

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}'}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{v}' = 0 \quad (26.20)$$

Vektor akustickej rýchlosti \mathbf{v}' je rýchlosť, ktorou kmitajú častice zvukového prostredia, ktoré tvoria zvukovú vlnu, okolo svojich rovnovážnych polôh. Je to časovo periodicky premenná veličina, ktorá pri zvukovom (pozdĺžnom) vlnení má smer šíriacej sa vlny. Nesmieme ju zamieňať s rýchlosťou šírenia akustickej vlny c_0 .

Rýchlosť pozdĺžnych vln v kvapalinách udáva vzťah

$$c_0 = \sqrt{K/\rho_0} \quad (26.21)$$

kde K je modul objemovej pružnosti kvapalného prostredia. Je to pomer medzi prírastkom všestranného tlaku a ním vyvolanou pomernou zmenou objemu

$$K = \frac{|\Delta p|}{\Delta V/V_0} \quad (26.22)$$

Ak akustické vlnenie prebieha v plyne o stálej hmotnosti a adiabatických podmienok (sústava je dokonale izolovaná – nedochádza k výmene tepla s okolím) potom pre rýchlosť zvuku c platí

$$c_0^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \frac{K}{\rho_0} \quad \rightarrow \quad c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0} \quad (26.23)$$

kde $\gamma = c_p / c_v$ je pomer merných tepelných kapacít pri konštantnom tlaku a konštantnom objeme

Homogénna vlnová rovnica (na rozdiel od nehomogénnej s nenulovou pravou stranou) definuje vlnenie bez prítomnosti jeho zdroja (možno si to predstaviť tak, že je niekde mimo uvažovanej oblasti) a zadanie konkrétnej úlohy vyžaduje predpis začiatočných a okrajových podmienok.

Predpokladajme teraz, že funkcia $p'(\mathbf{x}, t)$ vo vlnovej rovnici (26.18) sa s časom mení harmonicky a platí

$$p'(x, y, z, t) = \bar{p}(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (26.24)$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = (i\omega)^2 \bar{p} e^{i\omega t} = -\omega^2 p' \quad (26.25)$$

Po dosadení (26.25) do vlnovej rovnice (26.18) sa táto zmení na Helmholtzovu rovnicu

$$\nabla^2 \bar{p} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \bar{p} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \bar{p} + k^2 \bar{p} = 0 \quad (26.26)$$

ktorá neobsahuje čas a amplitúdy $\bar{p}(x, y, z)$ sú závislé len od polohy. Pomer $k = \omega / c_0$ sa nazýva uhlové vlnové číslo. Rovnica popisuje stojaté vlnenie v ohraničenej oblasti stanovenej okrajovými podmienkami.

Pre rovinné vlnenie, ktoré sa šíri v smere osi x sa vlnová a Helmholtzova rovnica zjednodušia na rovnice len s dvomi nezávislými premenými x a t :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \quad (26.27)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + k^2 \bar{p} = 0 \quad (26.28)$$

Ak vynásobíme pohybovú rovnicu (26.12) operátorom rotácie, dostaneme

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{v}' + \nabla \times (\nabla p') = \mathbf{0} \quad (26.29)$$

a pretože rotácia gradientu skalárneho poľa je nulové pole, rovnica sa zmení na

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{v}' = \mathbf{0} \quad (26.30)$$

čo znamená konštantnú a vzhľadom na už uvedený predpoklad nulového prúdenia média nulovú vírivosť poľa rýchlosti

$$\nabla \times \mathbf{v}' = \mathbf{0} \quad (26.31)$$

Potom odobne, ako pri iných nevírových poliach, aj v akustickom poli možno definovať skalárnu funkciu $\phi(x, y, z, t)$, tzv. akustický rýchlostný potenciál, vzťahom

$$\mathbf{v}' = \nabla \phi = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \phi(x, y, z, t) \quad (26.32)$$

Je to užitočný vzťah, pretože analyticky i numericky je výhodnejšie hľadať skalárnu veličinu (ϕ) ako vektorovú (\mathbf{v}'), pričom, ako vidieť, sa zložky rýchlosti z neho jednoducho dajú určiť.

Na zistenie vzťahu medzi rýchlostným potenciálom a tlakom p' využijeme jednorozmernú verziu pohybovej rovnice (26.12)

$$\rho_0 \frac{\partial(\nabla \phi)}{\partial t} + \nabla p' = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + p' \right) = 0 \rightarrow \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + p' = C(t) \quad (26.33)$$

Pomocou oprávneného predpokladu $C(t) = 0$, dostávame z (26.33) hľadaný vzťah (platný aj pre 3D oblasť)

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (26.34)$$

Vráťme sa teraz k rovnici kontinuity (26.11)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$$

Pomocou (26.16) a (26.34) z nej odstránime hustotu

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p'}{c_0^2} \right) + \rho_0 \nabla \cdot \nabla \phi = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla^2 \phi = 0$$

a dostávame potenciálovú formu vlnovej rovnice

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (26.35)$$

Pre okrajové podmienky sa využíva tlak (26.34) a rýchlosť (26.32).

Pri harmonickom vlnení s potenciálom

$$\phi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (26.36)$$

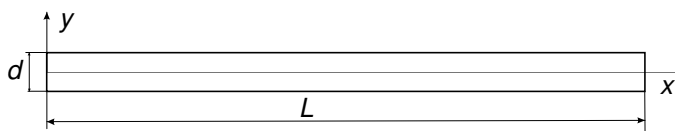
sa rovnica (26.35) zmení na Helmholtzovu

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad (26.37)$$

Na záver tejto časti poznamenávame, že pri analytickom riešení akustických problémom sa môžeme stretnúť aj s prepisom všetkých uvedených vlnových rovníc do cylindrického alebo sférického súradnicového systému.

Riešenie jednorozmernej vlnovej rovnice

Budeme analyzovať voľné pozdĺžne akustické vlnenie vzduchového stĺpca vo valcovej rúre o dĺžke L ($d \ll L$). Pri zanedbaní všetkých tlmiacich efektov možno takéto vlnenie považovať za rovinné, ktoré sa šíri v smere osi valca. Nech os valca má smer súradnicovej osi x (obr.2).



Obr. 2

Pri rovinnom vlnení pre pozdĺžne zmeny (kmity) tlaku p' v rúre platí jednorozmerná vlnová rovnica (26.27)

$$c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \quad (26.38)$$

čo znamená, že tlakové fluktuácie všetkých bodov rovinatej tlakovej vlnoplochy kolmej na os x sú rovnaké, a preto má hľadaná funkcia $p'(x, t)$ len dve nezávislé premenné x a t .

Diferenciálnu rovnicu (26.38) možno vyriešiť metódou separácie premenných. Funkciu $p'(x, t)$ vyjadríme ako súčin dvoch funkcií, z ktorých jedna je funkciou len polohy a druhá len času

$$p'(x, t) = X(x)T(t)$$

Potom

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = T \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = X \frac{d^2 T}{dt^2}$$

Po dosadení do vlnovej rovnice a separácii premenných dostávame rovnicu

$$c_0^2 \frac{d^2 X / dx^2}{X} = \frac{d^2 T / dt^2}{T}$$

Pretože funkcie X a T sú na sebe nezávislé, takéto dva výrazy sa sebe môžu rovnať len vtedy, keď obidva sa rovnajú tej istej konštante. Ak túto konštantu označíme $-k^2$, dostaneme diferenciálne rovnice pre určenie funkcií X a T

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 X$$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 T$$

Využijeme teraz základné definície z teórie vlnenia (kmitania): $c_0 = f\lambda = (\omega/2\pi)(2\pi/k) = \omega/k$. Čiže platí $c_0k = \omega$, čo možno využiť na úpravu druhej z uvedených rovníc a máme

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0 \quad (26.39)$$

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2T(t) = 0 \quad (26.40)$$

Pre istotu si pripomeňme názvy použitých veličín pri tomto odvodení: c_0 – rýchlosť zvuku (fázová rýchlosť) v m/s, f – frekvencia v 1/s (Hz), λ - dĺžka vlny v m, ω - uhlová frekvencia v rad/s, $k = \omega/c_0$ – uhlové vlnové číslo v rad/m.

Matematický tvar oboch rovníc je zhodný, sú to vlnové rovnice. Všimnime si, že rovnica (26.39) je časovo nezávislá jednorozmerná Helmholtzova rovnica (26.28). Všeobecné riešenia týchto rovníc je (možno sa o tom presvedčiť spätným dosadením)

$$X(x) = A\sin kx + B\cos kx \quad (26.41)$$

$$T(t) = C\sin \omega t + D\cos \omega t \quad (26.42)$$

a všeobecné riešenie rovinného pozdĺžneho akustického vlnenia v rúre potom je

$$p'(x,t) = X(x)T(t) = (A\sin kx + B\cos kx)(C\sin \omega t + D\cos \omega t) \quad (26.43)$$

Pre každé konkrétne (parikulárne) riešenie je potrebné určiť integračné konštanty z dvoch okrajových a dvoch začiatkových podmienok.

Uvažujme najprv, že oba konce rúry ($x = 0$ a $x = L$) sú otvorené. Okrajové podmienky v takomto prípade sú

$$(1) \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad p'(0,t) = 0$$

$$(2) \quad x = L \quad \rightarrow \quad p'(L,t) = 0$$

Tieto podmienky vyplývajú z toho, že v mieste otvoreného konca rúry je $p = p_0$ a v takom prípade (pozri (26.10)) je v tomto mieste $p' = 0$. Upozorňujeme tiež na to, že aj na otvorenom konci rúry (poddajná prekážka) dochádza tiež k odrazu akustickej vlny.

Z podmienky (1) dostávame

$$0 = B(C\sin \omega t + D\cos \omega t) \quad \rightarrow \quad B = 0$$

a z podmienky (2)

$$0 = A\sin kL(C\sin \omega t + D\cos \omega t) \quad \rightarrow \quad \sin kL = 0$$

Podmienku $\sin kL = 0$ spĺňa nekonečný počet uhlov $kL = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Ak označíme príslušné kruhové vlnové čísla $k_n = n\pi/L$ a dosadíme do (26.41), dostávame, ako špeciálny prípad vlnenia v rúre, na čase nezávislé riešenia pozdĺžneho stojateho vlnenia tlaku v rúre (tzv. vlastné tvary vlnenia) pri uvedených okrajových podmienkach

$$X(x) = A_n \sin(k_n x) = A_n \sin(n\pi x / L) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (26.44)$$

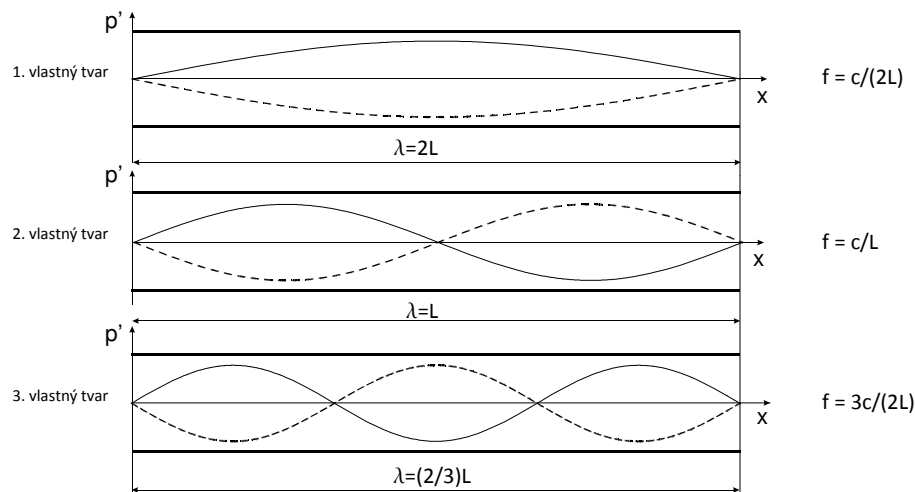
Pre frekvencie vlastných tvarov (vlastné frekvencie) platí

$$f = \frac{nc_0}{2L} \quad (26.45)$$

pretože $kL = n\pi \rightarrow (\omega/c_0)L = n\pi \rightarrow (2\pi f/c_0)L = n\pi \rightarrow f = nc_0/(2L)$.

Prvé tri vlastné tvary sme znázornili graficky na obr. 3 spolu s udanými vlastnými frekvenciami. Veľkosti tlaku p' sa menia s príslušnou frekvenciou medzi plnou a čiarkovanou čiarou, pričom sa vlna nepohybuje pozdĺž rúry. Miesta s nulovým tlakom p' sa nazývajú uzly a miesta s jeho maximálnym

rozkmitom – kmitne. Pripomínáme, že sa jedná o pozdĺžne vlnenie, takže zmeny tlaku v mieste x si treba predstaviť v pozdĺžnom smere a nie v priečnom, ako sú nakreslené jeho absolútne hodnoty v obrázku (priečne, tak, ako je to v obrázku, by kmitala struna o dĺžke L upevnená na koncoch) .



Obr. 3

Všeobecné riešenie vlnenia v rúre (26.43) sa po superpozícii členov $X(x)$ (26.44) zmení na

$$p'(x,t) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \right) (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \quad (26.46)$$

kde integračné konštanty C_n a D_n treba určiť z dvoch začiatočných podmienok pre $t=0$. Automatické zavedenie indexu n aj do časovo závislej časti riešenia (26.46) vyplýva zo zviazanosti priestorovej vlnovej dĺžky s časovo závislou frekvenciou cez vzťah $f = c_0/\lambda$, čo platí aj pre vlastné frekvencie $f_n = c_0/\lambda_n$, takže platí $\omega_n = n\pi c_0/L$. Začiatočné podmienky určujú, pre každý vlastný tvar, aká je jeho fáza (v akej polohe je jeho oscilačný cyklus) v čase $t = 0$.

Úplne analogicky by sme postupovali aj pri určovaní vlastných frekvencií a vlastných tvarov akustického vlnenia v rúre pri ďalších dvoch možných kombináciách okrajových podmienok (oba konce uzavreté a jeden koniec uzavretý, druhý otvorený), pričom na uzatvorenom konci správna okrajová podmienka je $dp'/dx = 0$, ktorú dostaneme derivovaním funkcie (26.43). Výsledky pre takúto konfiguráciu rúry sú uvedené v tab. 1.

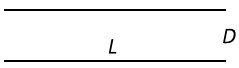


Princíp tvorby základných matíc konečného akustického prvku.

Problematiku tvorby základných matíc prvku sme podrobne opísali v [1] (kap. 8 - Určenie matíc prvku priamo z diferenciálnych rovníc úlohy), kde je vysvetlený aj princíp Galerkinovej metódy, ktorú využijeme aj v tomto prípade.

Budeme sa zaoberať tvorbou matíc akustického konečného prvku určeného na riešenie vlnovej rovnice pre akustický tlak (26.18)

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0 \quad (26.47)$$

Tabuľka 1

Konfigurácia	Schéma	Index $n =$	Vlastné frekvencie	Vlastný tvar
otvorená - otvorená		1, 2, 3, ...	$\frac{nc_0}{2L}$	$\sin(n\pi x/L)$
uzavretá - uzavretá		*0, 1, 2, ...	$\frac{nc_0}{2L}$	$\cos(n\pi x/L)$
uzavretá - otvorená		1, 3, 5, ...	$\frac{nc_0}{4L}$	$\cos[n\pi x/(2L)]$

* Prvý index rúry na oboch stranách uzatvorenej je $n = 0$, pri ktorom dostávame nultý vlastný tvar s $f = 0$ Hz a konštantným tlakom (tzv. vlastný tvar objemovej kompresie).

Rovnica (26.47) i ďalšie z nej odvodené platia za týchto predpokladov

1. Tekutina je stlačiteľná (hustota sa mení účinkom tlakových oscilácií)
2. Prúdenie média je nulové
3. Viskozita tekutiny je nulová
4. Stredná hodnota hustoty a tlaku sú rovnaké v celej oblasti

(Novšie verzie ANSYSu vypúšťajú posledné dve obmedzenia, čo vedie na komplexnejšiu formu rovníc a širší záber programu.)

Pri použití MKP sa oblasť rozdelí na konečné prvky a na všeobecnom e-tom prvku s n zvolenými uzlovými bodmi sa hľadá aproximácia funkcie $p'(x,y,z,t)$ a jej derivácií podľa času pomocou aproximačných vzťahov

$$p^e(x,y,z,t) = p^e = N_1(x,y,z)p_1^e(t) + N_2p_2^e(t) + \dots + N_n p_n^e(t) = \sum_{j=1}^n N_j(x,y,z)p_j^e(t) = \mathbf{N}^T \mathbf{p}^e \quad (26.48)$$

$$\frac{\partial p^e(x,y,z,t)}{\partial t} = \dot{p}^e = N_1(x,y,z)\dot{p}_1^e(t) + N_2\dot{p}_2^e(t) + \dots + N_n\dot{p}_n^e(t) = \sum_{j=1}^n N_j(x,y,z)\dot{p}_j^e(t) = \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{p}}^e \quad (26.49)$$

$$\frac{\partial^2 p^e(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \ddot{p}^e = N_1(x,y,z)\ddot{p}_1^e(t) + N_2\ddot{p}_2^e(t) + \dots + N_n\ddot{p}_n^e(t) = \sum_{j=1}^n N_j(x,y,z)\ddot{p}_j^e(t) = \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{p}}^e \quad (26.50)$$

kde N_j sú interpolačné (tvarové) funkcie prvku a p_j^e , \dot{p}_j^e , \ddot{p}_j^e sú hodnoty príslušných funkcií v uzloch prvku. Maticovo sú tieto hodnoty zapísané vo vektoroch \mathbf{N} , \mathbf{p}^e , $\dot{\mathbf{p}}^e$ a $\ddot{\mathbf{p}}^e$. Ak aproximácie \ddot{p}^e a p^e dosadíme do (26.47), rovnica vo všeobecnosti na prvku nebude splnená a dostaneme nenulový zvyšok (rezídium)

$$R(x,y,z,t) = \frac{1}{c_0^2} \ddot{p}^e - \nabla^2 p^e \neq 0 \quad (26.51)$$

Galerkinova metóda patrí do kategórie metód vážených zvyškov, pri ktorých sa funkcia $R(x,y,z,t)$ núti blížiiť sa k nule určitým sumačným (integrálnym) spriemerovacím spôsobom na oblasti, v našom prípade na objeme prvku V_e

$$\int_{V_e} R(x,y,z,t)w(x,y,z)dV = 0 \quad (26.52)$$

kde w je tzv. váhová funkcia. Dosadením zvyšku (26.51) do tejto rovnice dostávame

$$\int_{V_e} \left(\frac{1}{c_0^2} \ddot{p}^e - \nabla^2 p^e \right) w dV = 0 \quad (26.53)$$

Aplikovaním prvej Greenovej identity (pozri napr. Wikipédiu) na druhý člen integrandu sa výhodne zníži stupeň derivácie aproximačnej funkcie p^e (pri jednorozmerných príkladoch v [1] sa to robilo integrovaním tohto člena per partes)

$$\frac{1}{c_0^2} \int_{V_e} \ddot{p}^e w dV + \int_{V_e} \nabla p^e \cdot \nabla w dV - \int_{S_u^e} \frac{\partial p^e}{\partial n} w dS = 0 \quad (26.54)$$

čím sa tiež výhodne, vzhľadom na následné numerické riešenie, znížili (zoslabili) aj nároky na jej spojitosť. Dostali sme tak tzv. slabý tvar diferenciálnej rovnice (26.47) na prvku. V rovnici, ako vidieť, sa objavila aj prirodzená (Neumannova) okrajová podmienka $\partial p^e / \partial n$ v smere vokajšej normály n na ploche prvku S_u^e

$$\int_{S_u^e} \frac{\partial p^e}{\partial n} w dS \quad (26.55)$$

ktorá sa uplatní len vtedy, ak niektorá plocha prvku je na okrajovej ploche oblasti S_u s touto podmienkou.

Ak za váhovú funkciu w postupne zvolíme v rovnici (26.54) aproximačné funkcie prvku N_i (Garetkinova metóda) a zohľadníme, že $\partial p^e / \partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla p^e$, kde \mathbf{n} je jednotkový vektor normály, dostaneme

$$\frac{1}{c_0^2} \int_{V_e} \ddot{p}^e N_i dV + \int_{V_e} \nabla p^e \cdot \nabla N_i dV - \int_{S_u^e} \mathbf{n} \cdot \nabla p^e N_i dS = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (26.56)$$

V úlohách so vzájomnou interakciou tekutiny a konštrukcie sa plocha S_u^e s Neumannovou okrajovou podmienkou využíva ako rozhranie týchto dvoch oblastí a pre ich vzájomné pôsobenie sa využíva nasledujúci vzťah medzi normálovým tlakom a normálovým zrýchlením na rozhraní [Zienkiewicz]

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p^e = -\rho_0 \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (26.57)$$

kde \mathbf{u} je vektor posunutí konštrukcie na ploche rozhrania. Pre jeho druhú deriváciu podľa času je možno analogicky s deriváciou tlaku (26.50) použiť aproximačný vzťah

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{N}_s \ddot{\mathbf{u}}^e \quad (26.58)$$

kde \mathbf{N}_s je matica interpolačných funkcií konštrukčného prvku na rozhraní a $\ddot{\mathbf{u}}^e$ je vektor zložiek zrýchlenia uzlových bodov konštrukčného prvku na rozhraní.

Ak zavedieme maticový zápis operátora ∇ v tvare

$$\nabla^T f = \mathbf{L}^T = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right] \rightarrow \nabla f = \mathbf{L} f \quad (26.59)$$

potom maticový zápis rovnice (26.56) po dosadení za p^e a \ddot{p}^e podľa (26.48) a (26.50) a po dosadení maticového vyjadrenia $\mathbf{n} \cdot \nabla p^e$ podľa (26.57) a (26.58) je

$$\frac{1}{c_0^2} \int_{V_e} \mathbf{N}\mathbf{N}^T dV \ddot{\mathbf{p}}^e + \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dV \mathbf{p}^e + \rho_0 \int_{S_a^e} \mathbf{N}\mathbf{n}^T \mathbf{N}_s^T dS \ddot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{0} \quad (26.60)$$

kde

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}^T \quad (26.61)$$

Na okraji oblasti je odraz akustickej vlny vo všeobecnosti spojený s čiastočnou disipáciou prenášanej zvukovej energie. Časť energie sa premení na teplo a časť sa absorbuje a ďalej prenáša materiálom hranice oblasti. Absorpčné tlmenie je zviazané s rýchlosťou častice a ak prvok má časť plochy na okraji oblasti (S_a^e) potom sa v rovnici (26.60) objaví aj tlmiaci člen [Theory 12.1]

$$\frac{\beta}{c_0} \int_{S_a^e} \mathbf{N}\mathbf{N}^T dS \dot{\mathbf{p}}^e \quad (26.62)$$

v ktorom β je okrajový absorpčný koeficient ($\beta = 0$ bez absorpcie, $\beta = 1$ totálna absorpcia zvuku) , S_a^e je plocha prvku na okraji oblasti s absorpčným tlmením a $\dot{\mathbf{p}}^e$ je vektor uzlových hodnôt rýchlosti.

Sústavu rovníc (26.60) možno už teraz skompletizovať na tvar

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{p}}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{p}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{p}^e + \rho_0 \mathbf{R}^e \ddot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{0} \quad (26.63)$$

kde pre maticu akustickej hmotnosti tekutiny prvku \mathbf{M}^e , matice akustickej tuhosti tekutiny prvku \mathbf{K}^e , matice absorpčného tlmenia prvku \mathbf{C}^e a maticu väzobnej hmotnosti prvku $\rho_0 \mathbf{R}^e$ platí

$$\mathbf{M}^e = \frac{1}{c_0^2} \int_{V_e} \mathbf{N}\mathbf{N}^T dV \quad (26.64)$$

$$\mathbf{C}^e = \frac{\beta}{c_0} \int_{S_a^e} \mathbf{N}\mathbf{N}^T dS \quad (26.65)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dV \quad (26.66)$$

$$\rho_0 \mathbf{R}^e = \rho_0 \int_{S_a^e} \mathbf{N}\mathbf{n}^T \mathbf{N}_s^T dS \quad (26.67)$$

Ďalší postup riešenia úlohy je už v MKP štandardný. Výpočtový model celej oblasti sa tvorí jej geometrickou diskretizáciou na konečné prvky a globálne matice oblasti sa tvoria sumáciou rozšírených matíc prvkov [2]. Dostaneme takto výslednú (globálnu) sústavu rovníc v tvare

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K} \mathbf{p} + \rho_0 \mathbf{R} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (26.68)$$

kde názvy globálnych matíc sú rovnaké ako pri prvku.

Pri úlohách s akustickým zaťažením (akustickým budením) sa potom na pravej strane rovnice (26.68) objavia uzlové hodnoty príslušných zdrojov akustického budenia v globálnom vektore akustických budiacich síl \mathbf{f} a rovnica sa zmení na

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K} \mathbf{p} + \rho_0 \mathbf{R} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (26.69)$$

Modálna analýza

Modálna analýza sa využíva na výpočet prirodzených frekvencií a tvarov (módov) voľného stojateho harmonického vlnenia (kmitania) akustického systému (akustickej oblasti). Výsledky okrem posúdenia akustických vlastností oblasti môžu slúžiť aj na nútenú harmonickú, nestacionárnu (dynamickú) a spektrálnu analýzu systému.

Ako sme uviedli v predchádzajúcej časti, rovnice výpočtového modelu akustického systému bez

tlmenia sa zapisujú v tvare

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{f} \quad (26.70)$$

kde \mathbf{M} je (globálna) matica hmotnosti, \mathbf{K} je akustická matica tuhosti, \mathbf{f} je vektor vonkajších zaťažovacích (budiacich) uzlových síl a vektor \mathbf{p} obsahuje hodnoty tlaku v uzlových bodoch modelu. Pri voľnom harmonickom vlnení však $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ a uzlové tlaky kmitajú podľa vzťahu

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\phi} \cos \omega t \quad (26.71)$$

kde $\boldsymbol{\phi}$ je vektor amplitúd tlaku v uzlových bodoch, ω je uhlová rýchlosť (v rad/sek) a t je čas. Druhá derivácia (26.71) podľa času dáva

$$\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2 \boldsymbol{\phi} \cos \omega t \quad (26.72)$$

a po dosadení uvedených vektorov do (26.70) s $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, dostaneme časovo nezávislú sústavu homogénnych rovníc stojateho vlnenia tlakov v riešenej oblasti

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (26.73)$$

Takáto sústava rovníc má triviálne riešenie $\boldsymbol{\phi}_0 = \mathbf{0}$ a ďalších n nenulových riešení pre prípady kedy determinant sústavy sa rovná nule, t.j.

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (26.74)$$

Rozpísaním determinantu dostaneme algebrickú rovnicu stupňa n pre výpočet ω^2

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} & \cdots & k_{1n} - \omega^2 m_{1n} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} & \cdots & k_{2n} - \omega^2 m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} - \omega^2 m_{n1} & k_{n2} - \omega^2 m_{n2} & \cdots & k_{nn} - \omega^2 m_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (26.75)$$

Korene tejto rovnice predstavujú vo všeobecnosti n vlastných čísel sústavy rovníc (26.73), v tomto prípade n kvadrátov vlastných uhlových frekvencií telesa

$$\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_i^2, \dots, \omega_n^2$$

kde n je globálny počet uzlov (stupňov voľnosti) výpočtového modelu. Ľubovoľnej frekvencii ω_i možno potom zo vzťahu (26.73) priradiť vektor $\boldsymbol{\phi}_i$ - vlastný tvar - amplitúdy tlakového stojateho vlnenia (tlakového stojateho kmitania) uzlových bodov modelu pri tejto frekvencii.

Zo sústavy rovníc (26.73) je zrejmé, že ak $\boldsymbol{\phi}_i$ je jej riešením, potom aj $c\boldsymbol{\phi}_i$ je riešením pri ľubovoľnej hodnote čísla c . Fyzikálne to znamená, že amplitúdy voľného tlakového harmonického kmitania môžu mať (teoreticky) ľubovoľnú hodnotu v závislosti od veľkosti začiatočného impulzu, ktorý vyvolal tento pohyb. Pri výpočte amplitúd $\boldsymbol{\phi}_i$ sústavy (3) so známou hodnotou ω_i potom postupujeme tak, že ich normujeme; napr. tak, že postavíme $\phi_n = 1$. Pri takomto normovaní potom hodnoty amplitúd vo vlastnom tvare kmitania sú

$$\boldsymbol{\phi}_i = \begin{bmatrix} \phi_{i1} & \phi_{i2} & \cdots & \phi_{in-1} & 1 \\ \phi_{i1} & \phi_{in} & & \phi_{in} & \end{bmatrix}^T \quad (26.76)$$

Vo vypočítanom vlastnom tvare je teda relatívny pomer amplitúd správny, absolútne hodnoty sú však závislé od spôsobu ich normovania.

V mnohých prípadoch sú matice hmotnosti a tuhosti symetrické a na riešenie tejto úlohy možno v programe ANSYS zvoliť príslušnú metódu výpočtu (napr. blokovú Lanczosovu metódu). K dispozícii je aj

riešiť pre prípad nesymetrických matíc úlohy.

Treba vedieť, že ANSYS vypisuje vypočítané frekvencie automaticky v Herzoch po prepočítaní zo známeho vzťahu $f_i = \omega_i / 2\pi$.

Výpočtový model oblasti obyčajne obsahuje veľmi vysoký počet uzlov (stupňov voľnosti) a preto sa vo všeobecnosti vyčísluje len obmedzený počet relevantných najnižších vlastných frekvencií a vlastných tvarov.

Príklad 1

Pre rúru s $L = 3,0$ m a $D = 0,1$ m, naplnenú vzduchom s $\rho_0 = 1,21$ kg/m³ a $c_0 = 343$ m/s, určte prvých šesť vlastných frekvencií a nakreslite prvé tri vlastné tvary pomocou programu ANSYS. Úlohu riešte pre rúru na jednom konci uzavretú a na druhom otvorenú.

Úlohu sme v interaktívnom móde programu ANSYS vyriešili pomocou nasledujúcej postupnosti príkazov:

1. Redukcia ponuky príkazov a nastavení

Preferences, ANSYS Fluid, OK;

2. Voľba typu prvku

Preprocessor, Element type, Add/Edit/Delete, Add, ANSYS Fluid, 3D acoustic 30, OK, Options, K2 = Structure Absent, OK, Close;

3. Zadanie materiálových vlastností

Material Props, Material Models, Acoustics, Density, DENS = 1.21, OK, Sonic Velocity, SONC = 343, OK, Material, Exit;

4. Vytvorenie geometrického modelu rúry

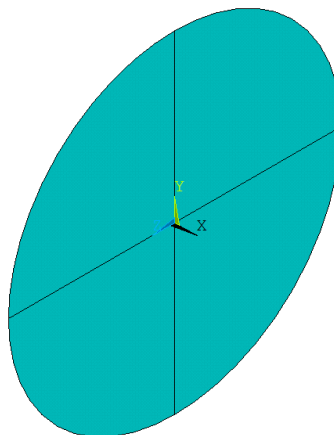
WorkPlane, Offset WP by Increments, Degrees = 90, Kliknite +Y, OK;

Modeling, Create, Areas, Circle, By Dimensions, Outer radius = 0.05, THET2 = 90, OK;

Reflect, Areas, Pick All, X-Y plane, Apply, Pick All, X-Z plane, OK;

Numbering Ctrl, Merge Items, Label = Keypoints, OK;

Isometric View  ;



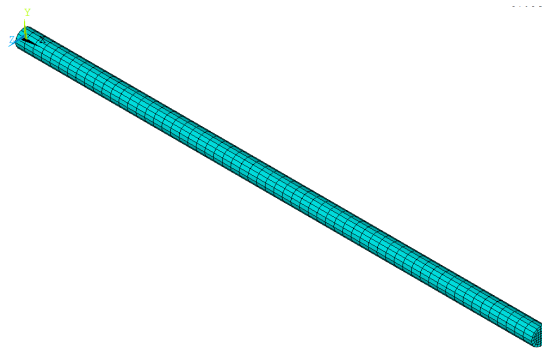
Modeling, Operate, Extrude, Areas, By XYZ Offset, Pick All, Dx = 3, OK;

Plot, Volumes;

Vytvorenie výpočtového modelu (siete prvkov)

Meshing, Size Cntrl, Manual Size, Lines, All Lines, NDIV = 4, OK, Picked Lines, Kliknite zhruba v strede rúry 4krát, OK, NDIV = 60, OK;

Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, Pick All, OK;



5. *Nastavenie parametrov riešenia úlohy, zadanie okrajovej podmienky a výpočet*
 Solution, Analysis Type, New Analysis, Modal, OK;

Analysis Options, No. of modes to extract = 6, NMODE = 6, OK, FREQE = 500, Nrmkey = To unity, OK;

Select, Entities, Nodes, By Location, X coordinates, Min = 3, Max = 3, OK;

Define Loads, Apply, Fluid/ANSYS, Pressure DOF, On Nodes, Pick All, PRES = 0, OK;

Select, Everything;

Solve, Current LS, OK;

6. *Vypísanie vlastných frekvencií*

General Postproc, Results Summary;

SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	28.584	1	1	1
2	85.772	1	2	2
3	143.02	1	3	3
4	200.36	1	4	4
5	257.85	1	5	5
6	315.50	1	6	6

7. *Vykreslenie prvých troch vlastných tvarov*

Read results, First Set;

Path Operations, Define Path, By Nodes, Kliknite ľubovoľný ľavý krajný a ľubovoľný pravý krajný uzol modelu, OK, Name = cesta, nDiv = 50, OK;

Map onto Path, Lab = MOD1, DOF solution = Pressure PRES, OK;

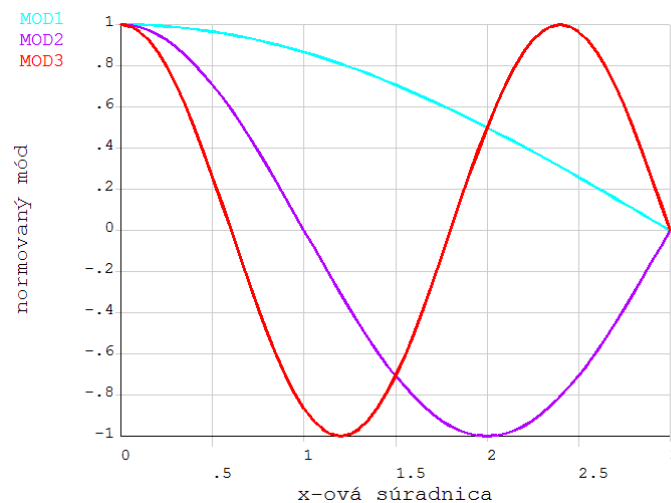
Read Results, Next Set;

Path Operations, Map onto Path, Lab = MOD2, OK;

Read Results, Next Set;

Path Operations, Map onto Path, Lab = MOD3, OK;

Plot Path Item, On Graph, Vyznačte MOD1, MOD2, MOD3, OK;



Poznámky k príkladu:

Na celom okraji výpočtového modelu je automaticky splnená Neumannova okrajová podmienka $\partial p' / \partial n = 0$ pre akusticky tuhý povrch, a preto ani pre uzavretý ľavý okraj rúry ($x = 0$) túto okrajovú podmienku nebolo potrebné zadávať.

Vzhľadom na rovinné vlnenie v smere osi x , vyplývajúce z tvaru oblasti, je možné deliť oblasť v smere osi y a z deliť aj redšie. Úlohu je možné riešiť aj pomocou rovinného prvku *2D acoustic 29*, dokonca aj jednorozmerným prvkom, pokiaľ by ho ANSYS mal, pretože hodnoty v uzloch na priečnom reze sú rovnaké ako v uzle na osi x . Úlohu sme riešili s priestorovým prvkom, aby sme mohli model využiť aj pri iných úlohách.

Hustota v smere osi x (v smere šírenia vlny) ovplyvňuje presnosť riešenia a počet prvkov pripadajúcich na dĺžku vlny $\lambda = c_0 / f$, by nemal výraznejšie klesnúť pod číslo 8, čo je v našom príklade splnené aj pri najvyššej počítanej frekvencii. Teoretické hodnoty prvých šiestich vlastných frekvencií podľa vzorca v tab. 1 sú: 28,6; 85,8; 142,9; 200,1; 257,3; 314,4 Hz, čo potvrdzuje vyhovujúcu presnosť numerického riešenia.

Harmonická analýza

Harmonická analýza sa využíva v prípadoch, kedy všetky zaťaženia (budiace sily) sa menia sinusoidálne (harmonicky) a majú rovnakú frekvenciu. Ich fázový posun voči sebe je však prípustný. Potom vektor zaťaženia v rovnici (26.69) (neuvažujeme interakciu s konštrukciou)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{f} \quad (26.77)$$

sa zadáva v komplexnom tvare

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_{\max} e^{i\psi}) e^{i\Omega t} = \mathbf{f}_{\max} (\cos\psi + i \sin\psi) e^{i\Omega t} = (\mathbf{f}_1 + i\mathbf{f}_2) e^{i\Omega t} \quad (26.78)$$

kde

\mathbf{f}_{\max} = amplitúda budiacej akustickej sily

Ω = budiaca kruhová frekvencia v rad/s = $2\pi f$

f = budiaca frekvencia v Hz

ψ = fázový posun sily v radiánoch

$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_{\max} \cos\psi$ = reálna zložka budiacej akustickej sily

$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_{\max} \sin\psi$ = imaginárna zložka budiacej akustickej sily

Účinkom budenia vzniknú v oblasti harmonické tlakové akustické zmeny s rovnakou frekvenciou ako je budiaca frekvencia Ω s prípadným fázovým posunom ϕ (účinkom tlmenia)

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_{\max} e^{i\phi}) e^{i\Omega t} = \mathbf{p}_{\max} (\cos\phi + i \sin\phi) e^{i\Omega t} = (\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2) e^{i\Omega t} \quad (26.79)$$

kde

\mathbf{p}_{\max} = globálny vektor tlakových amplitúd uzlových bodov

ϕ = fázový posun tlaku v radiánoch

$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_{\max} \cos\phi$ = reálna zložka tlaku

$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{\max} \sin\phi$ = imaginárna zložka tlaku

Dosadením (26.79) a (26.78) do rovnice (26.77) dostávame

$$(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C} + \mathbf{K})(\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2) e^{i\Omega t} = (\mathbf{f}_1 + i\mathbf{f}_2) e^{i\Omega t} \quad (26.80)$$

a pretože závislosť oboch strán rovnice na čase ($e^{i\Omega t}$) je rovnaká, z rovnice vypadne a výsledná rovnica harmonického tlakového vlnenia je na čase nezávislá

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C})(\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2) = (\mathbf{f}_1 + i\mathbf{f}_2) \quad (26.81)$$

Možno ju po úprave zapísať aj v jednoduchom tvare

$$\mathbf{K}_c \mathbf{p}_c = \mathbf{f}_c \quad (26.82)$$

kde index c označuje komplexnú maticu resp. vektor. Takúto sústavu rovníc riešia programy MKP ako statickú úlohu, len s tým rozdielom, že sa používa komplexná aritmetika. Výsledky možno od programu požadovať v dvoch základných formách. Jednak vo forme (26.79) alebo vo forme \mathbf{p}_{\max} a ϕ (t.j. amplitúda a fázový uhol – v stupňoch) tak, ako to definujú vzťahy v (26.79). Pre každý globálny stupeň voľnosti v tomto prípade dostávame

$$p_{\max} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \quad (26.83)$$

$$\phi = \arctan \frac{p_2}{p_1} \quad (26.84)$$

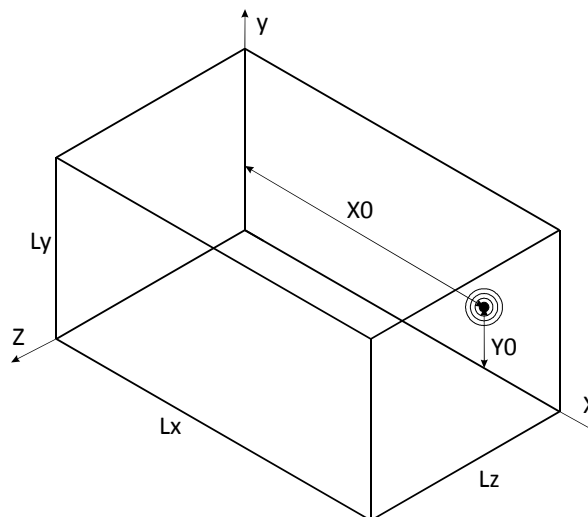
Na riešenie harmonickej analýzy možno využiť aj metódu superpozície vlastných tvarov, ktorej aplikácia je úplne analogická s jej využitím pri analýze harmonického kmitania pružných telies a podrobne je opísaná v našej práci [2].

Harmonická analýza sa často vykonáva tak, že sa zvolí frekvenčný interval, ktorý sa rozdelí na väčší počet frekvenčných hodnôt a v jednom výpočtovom behu programu sa vypočítajú a graficky analyzujú hľadané veličiny pre celý frekvenčný rozsah. Ukážeme si to v nasledujúcom príklade.

Príklad

Pravouhlá miestnosť (pozri obrázok) so zvukovo dokonale tuhými stenami má rozmery $L_x = 5\text{m}$, $L_y = 2,5\text{m}$, $L_z = 3\text{m}$. V miestnosti je umiestnený generátor zvuku vydávajúci čistý sínusový tón s frekvenciou $f_0 = 300\text{ Hz}$ a tlakovou amplitúdou $p'_{\max} = 0,1412\text{ Pa}$. Súradnice zdroja zvuku sú $X_0 = 4\text{ m}$, $Y_0 = 1\text{ m}$, $Z_0 = 0$. Vzduch v miestnosti má hustotu $\rho_0 = 1,21\text{ kg/m}^3$ a hodnota rýchlosti zvuku je $c_0 = 343\text{ m/s}$.


Určte ako sa v geometrickom strede miestnosti mení hladina akustického tlaku L_p pri zmene frekvencie zdroja od 300 do 400 Hz.

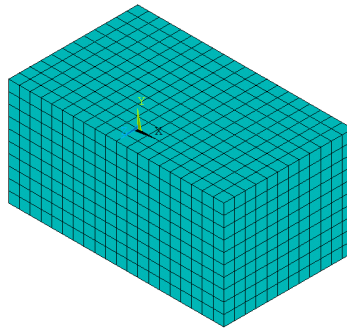


Vypočítajme najprv akú hodnotu L_p má zdroj zvuku. Pre hladinu akustického tlaku platí vzťah (26.3)

$$L_p = 20 \log_{10} \frac{p'_{rms}}{p_0} = 20 \log_{10} \frac{p'_{max} / \sqrt{2}}{p_0} = 20 \log_{10} \frac{0,1414 / \sqrt{2}}{20 \cdot 10^{-6}} = 73,97 \text{ dB}$$

Teraz pomocou programu ANSYS v interaktívnom móde určíme aké hodnoty L_p v geometrickom strede miestnosti vyvolá tento zdroj pri zmene jeho frekvencie v rozsahu od 300 do 400 Hz:

1. Názov úlohy
File, Change Jobname, SPL miestnosti, OK;
2. Preferovať akustiku
Preferences, ANSYS Fluid, OK;
3. Zadanie konečného prvku
Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, ANSYS Fluid, 3D acoustic 30, OK, Options, K2=Structure absent, OK, Close;
4. Referenčný akustický tlak
Real Constants, Add/Edit/Delete, Add, OK, PREF=20e-6, OK, Close;
5. Vlastnosti média
Material Props, Material Models, Acoustics, Density, DENS=1.21, Sonic Velocity, SONC=343, OK, Material, Exit;
6. Tvorba geometrického modelu
Modeling, Create, Volumes, Block, By Dimensions, X2=5, Y2=2.5, Z2=3, OK; (Kliknite ikonu Isometric View )
7. Sieť prvkov
Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Lines, All Lines, SIZE=0.25, OK;
Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, Pick All;




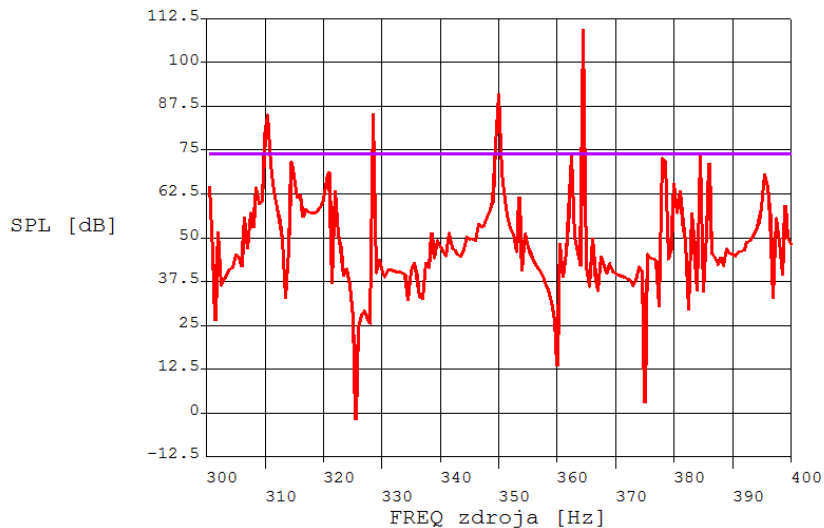
8. Zistenie čísiel uzlov zdroja zvuku a geom. stredu miestnosti
Napíšte do príkazového okna a Enterom vykonajte:
`node_zdroj=node(4,1,0)`
Napíšte do príkazového okna a Enterom vykonajte:
`node_stred=node(2.5,1.25,1.5)`
9. Vypísanie čísiel uzlov
Parameters, Scalar Parameters, Close; (node_zdroj=133, node_stred=2063)
10. Typ analýzy, jej parametre a výpočet
Solution, Analysis Type, New Analysis, Harmonic, OK;
Analysis Options, HROPT=Full,OK,OK;
Load Step Opts, Time/frequenc, Freq and Substeps, HARFRG=300, 400, NSUBST=200, KBC=Stepped,OK;
11. Zadanie akustického zaťaženia a výpočet
Define Loads, Apply, Fluid/ANSYS, Pressure DOF, On Nodes, List of Items=133, OK, PRES=0.1, OK;
SOLVE, Current LS, OK;
12. Graf priebehu hladiny akustického tlaku L_p v geom. strede miestnosti v závislosti od zmeny frekvencie zaťažovacieho zdroja (vznačíme aj L_p zdroja)
TimeHist Postproc, Zatvorte okno Variable Viewer;
Napíšte do príkazového okna a Enterom vykonajte:

nsol, 2, 2063,SPL,, SPL_v_strede

Napíšte do príkazového okna a Enterom vykonajte:

nsol, 2, 133,SPL,, SPL_zdroja

Variable Viewer, Vyznačte riadky oboch uzlov, Kliknite ikonu Graph data ;



13. Finish;

Interakcia zvuku a konštrukcie

Väzba zvuku s konštrukciou sa v technickej praxi bežne vyskytuje, napr. kmitajúca membrána vytvára vlnu kmitajúceho tlaku (zvuk) a naopak, napr. rezonančná stojatá vlna zvuku vznikajúca v T-odbočke plynovodu je schopná rozkmitať okolité potrubie.

Konečné prvky, ktoré sme v predchádzajúcich častiach využívali na riešenie príkladov, boli štandardné, tlakovo formulované prvky s jediným stupňom voľnosti uzla – tlakom p' , ktorého hodnoty v analyzovanej oblasti s určitými špeciálnymi fyzikálnymi vlastnosťami reprezentujú *akustické tlakové pole*. Podobne pri zaťaženom telese hovoríme o *mechanickom poli* (posunutí, pretvorení, napätí). Pokiaľ teda chceme riešiť interakciu mechanického a akustického poľa, teda dvoch fyzikálne rozdielnych polí, hovoríme o *viazanej úlohe* (kap. 23).