

D 12 Numerická integrácia konštitutívnych rovníc

1. Prírastkové riešenie pružne plastickej úlohy

Vo všeobecnosti sú konštitutívne rovnice pružne plastickeho materiálového modelu (v našom prípade je to von Misesov materiálový model s izotropným spevňovaním) závislé aj od zaťažovacej cesty (zaťažovacej histórie) príslušnej materiálovej častice (materiálového bodu). To znamená, že ak chceme dostať realistický výsledok riešenia pružne plastickej úlohy pre výpočtový model telesa, musíme ho zaťažovať ku konečnej hodnote prírastkovým spôsobom a sledovať pružne plastickejšiu históriu každého bodu (v realite MKP každého integračného bodu všetkých prvkov výpočtového modelu telesa). Formálnou mierou zaťažovania je pseudočas t diskrétno narastajúci v intervale $\langle 0, t_{\max} \rangle$ o hodnotu Δt , ktorá nemusí byť konštantná v celom intervale. Prívlastok *pseudo* vyplýva z toho, že uvažujeme stacionárnu (od času nezávislú) pružne plastickejšiu úlohu. Je to však vhodná miera prírastkov aj z toho dôvodu, že umožňuje potom prirodzeným spôsobom prechod na nestacionárne úlohy a bežne sa využíva aj v programoch MKP. Je zrejmé, že algoritmus, ktorý vyjadri riešenie v čase $t + \Delta t \equiv t_{n+1}$ pomocou hodnôt v čase $t \equiv t_n$, bude schopný riešiť úlohu v celom uvažovacom zaťažovacom intervale a dospeje k výsledku pre plnú hodnotu zaťaženia.

Po štandardnej geometrickej (prvkovej) diskretizácii (pozri napr.[1]) formulácia úlohy znie potom takto: Treba nájsť *globálny vektor posunutí uzlových bodov* \mathbf{u}_{n+1} v čase t_{n+1} tak, aby bola splnená prírastková (maticová) rovnica rovnováhy

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{f}_{n+1}^{ext} - \mathbf{q}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

kde je $\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1})$ je globálny vektor reziduálnych (nerovnovážnych) síl, $\mathbf{q}(\mathbf{u}_{n+1})$ globálny vektor vnútorných uzlových síl a \mathbf{f}_{n+1}^{ext} globálny vektor vonkajších uzlových síl v čase t_{n+1} . Pre vektor vonkajších síl v (1) sa vo výpočtových programoch MKP obyčajne zavádza

$$\mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \Lambda_{n+1} \mathbf{f}^{ext} \quad (2)$$

kde Λ_{n+1} je násobok vonkajších zaťažení diskrétno sa meniaci v intervale $(0, 1)$ a \mathbf{f}^{ext} je konečná hodnota globálneho vektora vonkajších uzlových síl. Takéto zaťažovanie sa nazýva *proporcionálne* alebo tiež *radiálne* (evolučná cesta tenzora napätia zobrazená v súradnicovom systéme hlavných napätí je rovná úsečka - radiála).

Globálne vektory v (1) sa vytvorili usporiadanou sumáciou prvkových vektorov (pozri napr. [1])

$$\mathbf{q}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1})) dV \quad (3)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} dV + \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{p}_{n+1} dS \quad (4)$$

V týchto rovniciach je väčšina veličín známa zo základov lineárnej MKP: \mathbf{N} a \mathbf{B} sú transformačné matice posunutí a deformácií všeobecného e-tého prvku (sú lineárne, pretože uvažujeme malé posunutia a malé deformácie), \mathbf{b} a \mathbf{p} sú vektory vonkajších uzlových síl prvku od objemového a plošného zaťaženia. Na rozdiel od lineárnej úlohy je však vo výpočte vnútorných uzlových síl elementu (3) namiesto napätia $\boldsymbol{\sigma}$ *prírastková* konštitutívna funkcia $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, ktorá je funkciou deformácie $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ v čase t_{n+1} a vnútorných premených $\boldsymbol{\alpha}_n$ v čase t . Je to vlastne algoritmický zápis numerickej procedúry, ktorej výsledkom je (aproximatívna) hodnota napätia

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_n) \quad (5)$$

potrebná do (3) na výpočet vektora vnútorných uzlových síl prvku v čase t_{n+1} .

K formálnemu vzťahu (5) sa patrí povedať niekoľko poznámok: Ak v bode telesa pri zaťažovacom kroku dochádza k plastickejšiu tečeniu vzťah medzi napätím, deformáciou a vnútornými premennými je nelineárny a určenie napätia na konci zaťažovacieho kroku podľa (5) predstavuje *interný* (na materiálovej

úrovni konečného prvku) numerický prírastkový integračný proces, ktorý treba odlišovať od globálneho prírastkového riešenia úlohy. Konštitutívny vzťah obsiahnutý v $\tilde{\sigma}$ je v danom prírastkovom kroku závislý len od $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, pretože druhý argument $\boldsymbol{\alpha}_n$ sa berie ako známa konštanta z času t . Proces výpočtu $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ je aproximačný, chyby vnesené na tejto úrovni sa už nedajú opraviť globálnou rovnovážnou iteráciou a to je dôvod, prečo sa algoritmom integrácie konštitutívnych rovníc i analýze chýb tohto procesu venuje v teórii MKP toľko pozornosti. Nelinearita konštitutívnych rovníc cez vnútorné uzlové sily prvku (3) vchádza do globálnej formulácie úlohy a spôsobuje, že globálne rovnice rovnováhy (1) sú nelineárne, nie sú automaticky splnené ako pri lineárnej úlohe, a treba ich riešiť iteračne (najčastejšie Newton-Raphsonovou metódou).

2. Numerická integrácia metódou elastický prediktor-plastický korektor

Na numerickú integráciu nelineárnych funkcií $\tilde{\sigma}$ a $\tilde{\alpha}$ v intervale (t, t_{n+1}) možno využiť množstvo metód (pozri napr. [Lit1] a [2]). V programoch MKP sa najčastejšie využíva metóda *elastický prediktor-plastický korektor*. Princíp tejto metódy možno zhrnúť do dvoch postupných a na seba nadväzujúcich algoritmických krokov:

a) Testovací elastický krok (elastický prediktor)

Najprv sa predpokladá, že v kroku $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$ prírastok celkovej deformácie $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ v uvažovanom bode je elastický ($\Delta \lambda = 0$). Potom z prírastku celkovej deformácie a známych hodnôt z predchádzajúceho zaťažovacieho kroku možno určiť skúšobné hodnoty (vnútorné premenné $\boldsymbol{\alpha}$, určujúce spevňovanie materiálu, sa pri elastickej deformácii nemenia)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ test} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} &= \rho \left. \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_n^e} \right|_{n+1}^{test} \\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{test} &= \boldsymbol{\alpha}_n \\ \mathbf{a}_{n+1}^{test} &= \rho \left. \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|_{n+1}^{test}\end{aligned}\tag{6}$$

kde význam niektorých veličín sme uviedli v [D11]. Nasleduje kontrola testovacieho elastického stavu pomocou podmienky plasticity. Ak platí

$$f^{test} \equiv f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test}, \mathbf{a}_{n+1}^{test}) \leq 0\tag{7}$$

znamená to, že skúšobné napätie $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test}$ vyšetrovaného bodu leží v elastickej oblasti, alebo sa práve nachádza na ploche plasticity a môže byť akceptované ako výsledné napätie $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. Platí to aj pre ostatné veličiny v (6). V opačnom prípade má napätie plasticity neprípustnú hodnotu a musí sa opraviť (ako aj ďalšie testovacie hodnoty) pomocou algoritmu plastického korektora.

b) Plastický korektor (algoritmus návratu na plochu plasticity)

Pre bod, ktorý nespĺňa podmienku (7), t.j. pre ktorý $f^{test} > 0$, je potrebné vykonať numerickú integráciu všetkých potrebných nelineárnych funkcií v intervale $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$. V algoritme plastického korektora sa často využíva *plne implicitná spätná Eulerova metóda* (známa zo základov numerického riešenia nelineárnych rovníc) v našom prípade s rovnicami

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ test} - \Delta \lambda \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}) \\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1} &= \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{test} + \Delta \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1})\end{aligned}\tag{8}$$

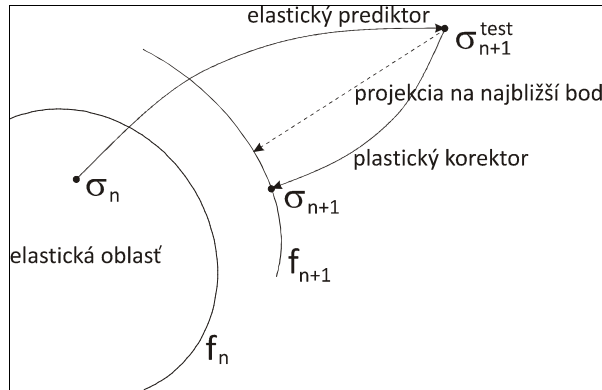
a s podmienkou, že napätie sa musí nachádzať na spevňovaním zmenenej ploche plasticity (obr.1)

$$f(\sigma_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}) = 0 \quad (9)$$

Ak elastické vlastnosti materiálu sú lineárne, možno prvú rovnicu v (8) ekvivalentne nahradiť rovnicou s napäťovými členmi - takto upravený algoritmus sa nazýva *metódou projekcie na najbližší bod* (obr.1)

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{test} - \Delta \lambda \mathbf{D}^e : \mathbf{f}_{n+1} \quad (10)$$

Ako sme už uviedli, existuje množstvo ďalších metód a postupov určovania napätia σ_{n+1} i keď mnohé z nich sú v podstate len určitou modifikáciou alebo rozšírením uvedenej metódy.



Obr.1 Grafická schéma metódy elastický prediktor-plastický korektor a projekcie na najbližší bod

3. Numerická integrácia nelineárnych rovníc von Misesovho materiálového modelu

Uvedený algoritmus numerického riešenia nelineárnych "pružne plastických" rovníc v integračnom bode konečného prvku skonkretizujeme teraz pre von Misesov materiálový model. Hľadáme riešenie pre všeobecný zaťažovací krok z času t_n do času t_{n+1} , v ktorom nám štandardná procedúra MKP z prírastku zaťaženia $\Delta \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{f}_{n+1}^{ext} - \mathbf{f}_n^{ext}$ dodá pre integračný bod prírastok celkovej deformácie $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ a všetky známe stavové veličiny učené pre čas t_n . Potom skúšobné hodnoty elastickej deformácie, akumulovanej hodnoty ekvivalentnej plastickej deformácie a napätia sú

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e test} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p test} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \\ \sigma_{n+1}^{test} &= \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e test} \end{aligned} \quad (11)$$

Napätie σ_{n+1}^{test} možno ekvivalentne vyjadriť aj pomocou jeho deviatora a stredného napätia [D10]

$$\mathbf{s}_{n+1}^{test} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d n+1}^{e test}, \quad \sigma_{m n+1}^{test} = K \boldsymbol{\varepsilon}_{v n+1}^{e test} \quad \rightarrow \quad \sigma_{n+1}^{test} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} + \sigma_{m n+1}^{test} \mathbf{I} \quad (12)$$

kde G je modul pružnosti v šmyku, K je objemový modul materiálu, $\boldsymbol{\varepsilon}_d^e$ je deviatorická časť tenzora pružnej deformácie, $\boldsymbol{\varepsilon}_v^e = tr \left| \boldsymbol{\varepsilon}^e \right|$ je objemová pružná deformácia. Za skúšobnú hodnotu medze sklzu sa jednoducho zoberie jej hodnota na konci predchádzajúceho kroku

$$\bar{\sigma}_{k n+1}^{test} = \bar{\sigma}_k(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) = \bar{\sigma}_{k n} \quad (13)$$

Nasleduje kontrola či skúšobná elastická napätosť leží vo vnútri alebo práve na hranici pružnej oblasti skúšobnej plochy plasticity

$$f(\sigma_{n+1}^{test}, \bar{\sigma}_{k n}) \leq 0 \quad (14)$$

Ak je táto podmienka splnená, potom zaťažovací krok v tomto bode vyvolal len pružné deformácie a skúšobné hodnoty predstavujú výsledné hodnoty pre čas t_{n+1}

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{test} \\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} \\
\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ test} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p \\
\bar{\sigma}_{k\ n+1} &= \bar{\sigma}_{k\ n+1}^{test} = \bar{\sigma}_{k\ n}
\end{aligned} \tag{15}$$

Ak podmienka (14) nie je splnená, potom v zaťažovacom kroku v integračnom bode prvku dochádza k pružne plastickej deformácii a výsledné hodnoty $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ a $\Delta\lambda$ pre čas t_{n+1} treba určiť z nelineárnych rovníc plastického korektora (8)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ test} - \Delta\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \\
\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\lambda
\end{aligned} \tag{16}$$

kde

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) = 2Gdev[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e] \tag{17}$$

pri zaručení podmienky plasticity [D11]

$$\bar{\sigma}_{n+1} - \bar{\sigma}_k(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1} - \bar{\sigma}_k(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \tag{18}$$

Po vyriešení tejto sústavy rovníc sa tenzor plastickej deformácie upravuje už so známymi hodnotami $\Delta\lambda$ a \mathbf{s}_{n+1} podľa vzťahu

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \tag{19}$$

a pre napätie platí

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + \sigma_{m\ n+1} \mathbf{I} \tag{20}$$

Systém nelineárnych rovníc (16) možno pre von Misesov materiálový model výrazne zjednodušiť. Pri nelineárnom spevňovaní možno ho zredukovať na jedinú nelineárnu rovnicu s jedinou neznámu $\Delta\lambda$ a pri lineárnom spevňovaní možno hľadané hodnoty v čase t_{n+1} dokonca určiť priamo z hodnôt skúšobného elastického kroku. Ako sme už uviedli v D11 von Misesov vektor plastického tečenia

$$\mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \tag{21}$$

je čisto deviatorický, objemová zložka $\sigma_{m\ n+1}$ sa v (20) pri algoritme nemení

$$\sigma_{m\ n+1} = \sigma_{m\ n+1}^{test} \tag{22}$$

a treba určiť len deviator napätia, pre ktorý podľa Eulerovej metódy analogicky s (10) platí

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} - \Delta\lambda \mathbf{D}^e : \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} - \Delta\lambda 2G \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} - \Delta\lambda 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \tag{23}$$

a po úprave

$$\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\lambda 2G}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \right) \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test}$$

Pretože výraz v zátvorke je skalár, obe deviatorické napätia sú kolineárne

$$\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{test}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{test}\|}$$

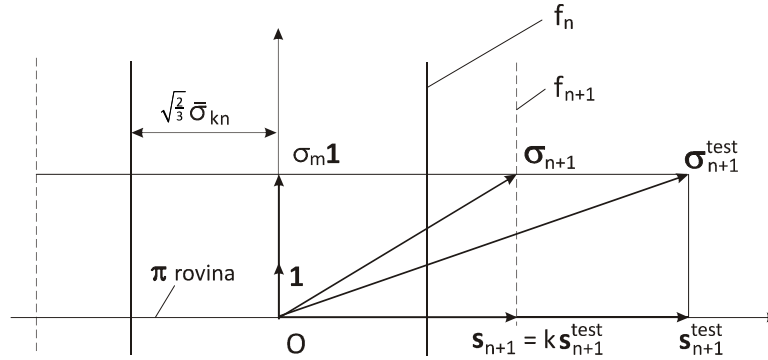
a keď to využijeme v (23) dostaneme jednoduchý vzťah pre výpočet deviatora napätia v čase t_{n+1}

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2G}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{test}\|} \Delta\lambda \right) \mathbf{s}_{n+1}^{test} = \left(1 - \frac{3G}{\bar{\sigma}_{n+1}^{test}} \Delta\lambda \right) \mathbf{s}_{n+1}^{test} = k \mathbf{s}_{n+1}^{test} \quad (24)$$

kde

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{test} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}_{n+1}^{test} : \mathbf{s}_{n+1}^{test}}$$

Z (24) vyplýva, že deviatorické napätie \mathbf{s}_{n+1} dostaneme na zmenenú kružnicu plasticity (v deviatorickej π -rovine) jednoduchým vynásobením napätia \mathbf{s}_{n+1}^{test} číslom $k < 0$. Hovoríme potom o *radiálnom* návrate napäťového bodu na novú plochu plasticity (obr. 2).



Obr. 2 Grafické znázornenie radiálneho návratu skúšobného napätia na von Misesovu plochu plasticity

Zostáva už len určiť rovnicu pre jedinú neznámu $\Delta\lambda$ z von Misesovej podmienky plasticity (18), do ktorej keď dosadíme (24) a (16)₁ dostaneme

$$\bar{f}(\Delta\lambda) = \bar{\sigma}_{n+1}^{test} - 3G\Delta\lambda - \bar{\sigma}_{kn+1}(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\lambda) = 0 \quad (25)$$

Rovnica je pri nelineárnom spevňovaní nelineárna a $\Delta\lambda$ sa z nej určuje Newton-Raphsonovou metódou. So známym plastickým násobkom potom už možno \mathbf{s}_{n+1} určiť z (24) a ďalšie hľadané hodnoty pre čas t_{n+1} z rovníc

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1} + \sigma_{m n+1}^{test} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e &= [\mathbf{D}^e]^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{2G} + \frac{\epsilon_{v n+1}^{e test}}{3} \mathbf{I} \\ \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p + \Delta\lambda \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\epsilon}_n^p + \Delta\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \end{aligned} \quad (26)$$

Pri lineárnom izotropnom spevňovaní, t.j. pri bilineárnej aproximácii jednoosovej krivky materiálu [D10], platí [D11]

$$\bar{\sigma}_k^n = \sigma_k + H\bar{\epsilon}_n^p \quad (27)$$

kde σ_k je začiatočná medza sklzu nedeformovaného materiálu a H je konštantný spevňovací modul. V takomto prípade sa rovnica (25) sa zmení na

$$\bar{f}(\Delta\lambda) = \bar{\sigma}_{n+1}^{test} - 3G\Delta\lambda - \sigma_k + H(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\lambda) = 0 \quad (28)$$

z ktorej dostaneme plastický násobok priamo bez potreby Newton-Raphsonovej iterácie

$$\Delta\lambda = \frac{f_{n+1}^{test}}{3G+H} = \frac{\bar{\sigma}_{n+1}^{test} - \bar{\sigma}_k^n}{3G+H} = \frac{\bar{\sigma}_{n+1}^{test} - (\sigma_k + H\bar{\epsilon}_n^p)}{3G+H} \quad (29)$$

Príklad 1

Pre všeobecný nezaťažený bod telesa je dané: $E = 200000$ MPa, $E_t = 2000$ MPa, $\sigma_k = 200$ MPa, $\mu = 0$. Metódou radiálneho návratu treba určiť výslednú napätosť, keď v prvom zaťažovacom kroku vzrastie jeho deformácia o hlavné zložky $\varepsilon_1 = 0,002$, $\varepsilon_2 = 0,001$, $\varepsilon_3 = -0,002$. Uvažuje sa von Misesov materiálový model s lineárnym izotropným spevňovaním.

Riešenie

Úlohu budeme riešiť v maticovom zápise. Pretože v bode pôsobia len tri hlavné zložky deformácie a napätia, zredukujeme vektory napätia a deformácie na tento rozmer a maticu elastických materiálových konštánt na

$$\mathbf{D}^e = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu \\ \mu & 1-\mu & \mu \\ \mu & \mu & 1-\mu \end{bmatrix}$$

Skúšobné napätie potom je

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = 200000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,002 \\ 0,001 \\ -0,002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \text{ MPa} \\ 200 \text{ MPa} \\ -400 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

s ekvivalentným napätím

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{test} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} = 721,11 \text{ MPa}$$

a hodnotou zaťažovacej funkcie v tomto napätíovom bode

$$f_{n+1}^{test} = \bar{\sigma}_{n+1}^{test} - \sigma_k = 521,11 \text{ MPa} > 0$$

z čoho vyplýva, že bod sa dostal za plochu plasticity a napätie treba určiť radiálnym návratom na zmenenú plochu plasticity.

Stredné (hydrostatické) napätie skúšobného napätia je

$$\sigma_m^{test} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 = 66,67 \text{ MPa}$$

a deviatorické napätie

$$\mathbf{s}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m \\ \sigma_2 - \sigma_m \\ \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333,33 \text{ MPa} \\ 133,33 \text{ MPa} \\ -466,67 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

Plastický násobok (v prvom kroku je totožný s ekvivalentnou plastickou deformáciou) podľa (29) je

$$\Delta \lambda = \frac{f_{n+1}^{test}}{3G+H} = \frac{f_{n+1}^{test}}{3 \frac{E}{2(1+\mu)} + \frac{EE_t}{E-E_t}} = 0,0017254$$

Hodnoty zložiek deviatorického napätia podľa (24)

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \frac{3G}{\bar{\sigma}_{n+1}^{test}} \Delta \lambda \right) \mathbf{s}_{n+1}^{test} = 0,28219 \mathbf{s}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} 94,06 \text{ MPa} \\ 37,62 \text{ MPa} \\ -131,69 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

umožňujú už určiť výslednú napätosť

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \begin{bmatrix} \sigma_{1n+1} \\ \sigma_{2n+1} \\ \sigma_{3n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} + \sigma_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160,73 \text{ MPa} \\ 104,29 \text{ MPa} \\ -65,02 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

Nová hodnota (následnej) medze sklzu teraz je

$$\bar{\sigma}_{kn+1} = \sigma_k + H\bar{\epsilon}_p = \sigma_k + H\Delta\lambda = 203,49 \text{ MPa}$$

Nová hodnota ekvivalentného von Misesovho napätia

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} \Big|_{n+1} = 203,49 \text{ MPa}$$

Kontrola hodnoty zaťažovacej funkcie (kontrola návratu napätia na zmenenú plochu plasticity)

$$f_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1} - \bar{\sigma}_{kn+1} = 203,49 - 203,49 = 0$$

Príklad 2

Príklad 1 riešte pomocou programu ANSYS

Riešenie

Úlohu vyriešime pomocou jediného priestorového pružne plastického konečného prvku tvaru kocky s jednotkovými stranami. Hlavné pomerné deformácie zadáme ako posunutia v smere hrán prvku s rovnakými hodnotami ako sú tieto deformácie. Na jednotkových dĺžkach prvku tak vyvoláme udané deformácie a dostaneme hľadanú napätosť.

Úlohu sme v interaktívnom móde programu zadali a vypočítali týmto postupom:

1. Zadanie názvu úlohy

Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = Príklad D12-2, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu

Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Solid Brick 20 node, 186, OK, Close;

3. Materiálové údaje

Lineárne:

Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 2e5, PRXY = 0.0, OK;

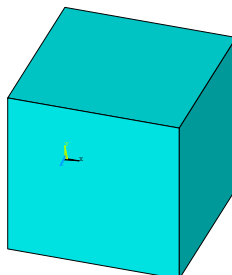
Nelineárne:

Nonlinear, Inelastic, Rate Independent, Isotropic Hardening Plasticity, Mises Plasticity, Bilinear, Yield Stress = 200, Tang Mod = 2000, OK, Material, Exit;

4. Vytvorenie jednotkovej kocky

Preprocessor>Modeling>Create>Volumes>Block>By Dimensions..., X2 = 1, Y2 = 1, Z2 = 1, OK;

Kliknite ikonu priestorového pohľadu na kocku (*Oblique View*)



5. Vytvorenie prvkov

Preprocessor>Meshing>Mesh Tool: Size Controls: Global, Set, SIZE = 1, OK, Shape = HEX, Mesh, Pick All;

6. Upevnenie modelu a zadanie posunutí

Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Areas,

↑(Kliknite:) Ľavú stenu elementu, OK, Lab2 = UX, Apply,

↑ Spodnú stenu elementu, OK, Lab2 = UY, Apply,

↑ Zadnú stenu elementu, OK, Lab2 = UZ, Apply,

↑ Pravú stenu elementu, OK, Lab2 = UX, Value = 0.002, Apply,

↑ Hornú stenu elementu, OK, Lab2 = UY, Value = 0.001, Apply,

↑ Prednú stenu elementu, OK, Lab2 = UZ, Value = - 0.002, OK;

7. Riadiace údaje nelineárneho riešenia a výpočet

Main Menu>Solution>Analysis Type>Sol'n Controls...Time at end of loadstep = 1, Number of subst. = 1, OK;

Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

8. Výpis zložiek napätia prvkov

Main Menu>General Postproc>List Results> Nodal Solution..., Stress, 1st Principal stress, OK;

PRINT S NODAL SOLUTION PER NODE

NODAL RESULTS ARE FOR MATERIAL 1

NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQV
1	160.73	104.29	-65.019	225.75	203.49
2	160.73	104.29	-65.019	225.75	203.49
4	160.73	104.29	-65.019	225.75	203.49
6	160.73	104.29	-65.019	225.75	203.49
9	160.73	104.29	-65.019	225.75	203.49
10	160.73	104.29	-65.019	225.75	203.49
12	160.73	104.29	-65.019	225.75	203.49
14	160.73	104.29	-65.019	225.75	203.49

9. Výpis stredného normálového napätia (HPRE) a ekvivalentnej plastickej deformácie (EPEQ)

Main Menu>General Postproc>List Results> Element Solution..., Stress, Plastic equivalent stress, OK;

PRINT NL ELEMENT SOLUTION PER ELEMENT

ELEMENT= 1 SOLID186

NODE	SEPL	SRAT	HPRE	EPEQ	CREQ	PLWK
2	0.0000	1.0000	66.667	0.17254E-02	0.0000	0.34809
6	0.0000	1.0000	66.667	0.17254E-02	0.0000	0.34809
4	0.0000	1.0000	66.667	0.17254E-02	0.0000	0.34809
1	0.0000	1.0000	66.667	0.17254E-02	0.0000	0.34809
9	0.0000	1.0000	66.667	0.17254E-02	0.0000	0.34809
10	0.0000	1.0000	66.667	0.17254E-02	0.0000	0.34809
12	0.0000	1.0000	66.667	0.17254E-02	0.0000	0.34809
14	0.0000	1.0000	66.667	0.17254E-02	0.0000	0.34809

10. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy

Ansys Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;

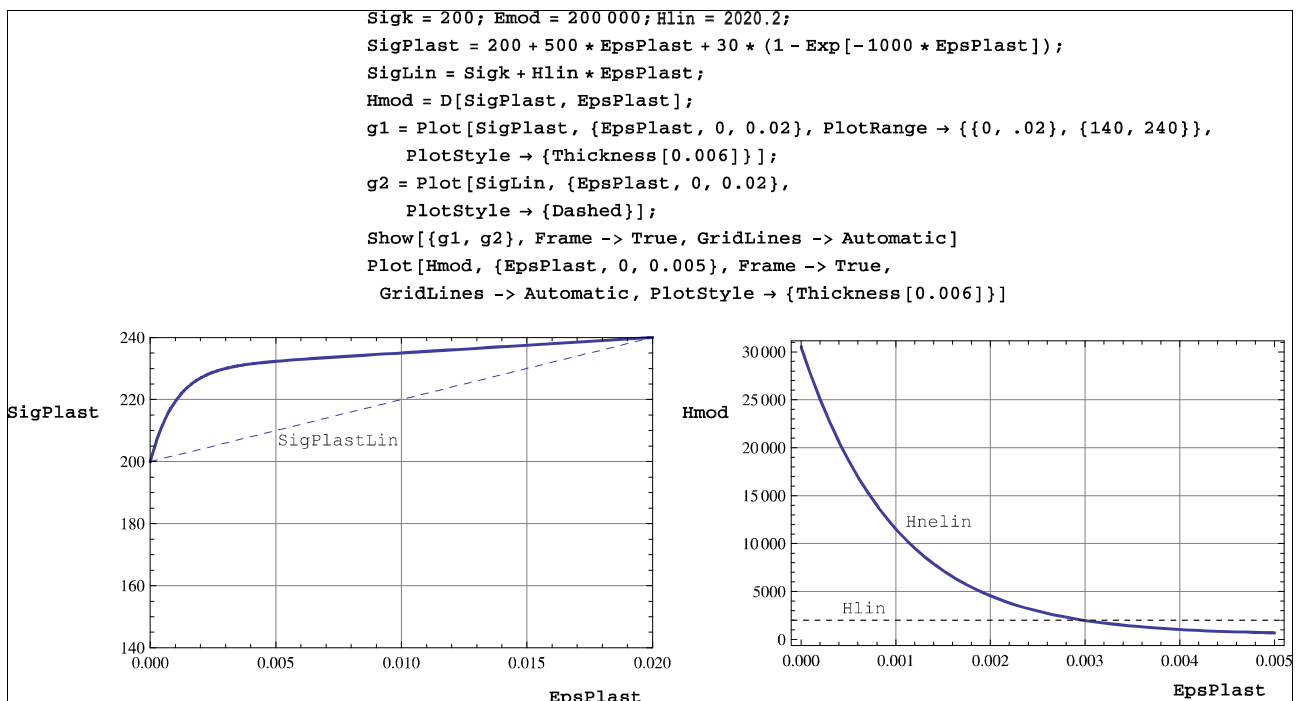
Vypočítané výsledky súhlasia s analytickým riešením (Príklad 1).

Elegantná metóda radiálneho návratu platí len pre von Misesovu zaťažovaciu funkciu a spolu s ostatnými univerzálnymi metódami pre úlohy, kde všetky normálové zložky napätia sú voľné *premenné*, t.j. pre všeobecnú priestorovú napätosť, rovinnú deformáciu a rotačne symetrickú úlohu. Dôležitý prípad pružne plastickej úlohy pre *rovinnú napätosť*, kedy jedna z troch normálových zložiek napätia sa rovná nule, treba riešiť pomocou špeciálnej procedúry vytvorenej pre tento stav napätosti.

Nelineárne spevňovanie predstavuje v uvedenej procedúre len pomerne malú komplikáciu, pretože určenie $\Delta\lambda$ z nelineárnej rovnice (25) pomocou Newton-Raphsonovej metódy je jednoduché. Ukážeme si to na riešení úlohy s materiálom, ktorého spevňovaciu krivku možno aproximovať pomocou Voceho vzťahu (pozri napr. manuál ANSYSu)

$$\bar{\sigma}_k = \sigma_k + a\varepsilon^p + b(1 - e^{-c\varepsilon^p}) \quad (30)$$

kde a, b, c sú materiálové konštanty a σ_k je začiatočná medza skazu materiálu. Ak zvolíme $\sigma_k = 200$ MPa, $a = 500$ MPa, $b = 30$ MPa a $c = 1000$, potom jednoosová nelineárna spevňovacia krivka materiálu a nelineárny jednoosový materiálový modul majú tvar znázornený v obr. 3. Do grafov sme zakreslili aj lineárny priebeh $\bar{\sigma}_k = H\bar{\varepsilon}^p$ s konštantnou hodnotou $H = 2020,2$ MPa, čo zodpovedá hodnotám $E = 200000$ MPa a $E_T = 2000$ MPa z príkladov 1 a 2 a môže to byť považované za lineárnu aproximáciu spevňovacej krivky. Tieto príklady totiž teraz zopakujeme s nelineárnymi hodnotami z obr. 3 a budeme môcť porovnať rozdiel vo výslednej napätosti.



Obr.3 Nelineárna spevňovacia krivka, nelineárny plastický modul a ich lineárne aproximácie

Príklad 3

Pre všeobecný nezaťažovaný bod telesa je dané: $E = 200000$ MPa, $\sigma_k = 200$ MPa, $\mu = 0$. Metódou elastický prediktor-plastický korektor treba určiť výslednú napätosť, keď v prvom zaťažovacom kroku vzrastie jeho deformácia o hlavné zložky $\varepsilon_1 = 0,002$, $\varepsilon_2 = 0,001$, $\varepsilon_3 = -0,002$. Uvažuje sa von Misesov materiálový model s nelineárnym izotropným spevňovaním. Po dosiahnutí začiatočnej medze skazu σ_k sa medza skazu v závislosti od ekvivalentnej plastickej deformácie $\bar{\varepsilon}^p$ spevňuje podľa vzťahu (obr. 3)

$$\bar{\sigma}_k = 200 + 500\bar{\varepsilon}^p + 30(1 - e^{-1000\bar{\varepsilon}^p})$$

Riešenie

Úlohu budeme riešiť v maticovom zápise. Pretože v bode pôsobia len tri hlavné zložky deformácie a napätia, zredukujeme vektory napätia a deformácie na tento rozmer a maticu elastických materiálových konštánt na

$$\mathbf{D}^e = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu \\ \mu & 1-\mu & \mu \\ \mu & \mu & 1-\mu \end{bmatrix}$$

Skúšobné napätie potom je

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = 200000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,002 \\ 0,001 \\ -0,002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \text{ MPa} \\ 200 \text{ MPa} \\ -400 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

s ekvivalentným napätím

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{test} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} = 721,11 \text{ MPa}$$

a hodnotou zaťažovacej funkcie v tomto napätovom bode

$$f_{n+1}^{test} = \bar{\sigma}_{n+1}^{test} - \sigma_k = 521,11 \text{ MPa} > 0$$

z čoho vyplýva, že bod sa dostal za plochu plasticity a napätie treba určiť návratom na zmenenú plochu plasticity pomocou plastického korektora.

Stredné napätie skúšobného napätia je

$$\sigma_m^{test} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 = 66,67 \text{ MPa}$$

a deviatorické skúšobné napätie

$$\mathbf{s}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m \\ \sigma_2 - \sigma_m \\ \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333,33 \text{ MPa} \\ 133,33 \text{ MPa} \\ -466,67 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

Plastický násobok (v prvom kroku je totožný s ekvivalentnou plastickou deformáciou $\Delta\lambda = \bar{\varepsilon}^p$) určíme z nelineárnej rovnice (25) pomocou Newton-Raphsonovej metódy (metódu a použitý program sme vysvetlili v [2])

```
NR[SigEkvTest_, LambdaZac_, imax_, TolDov_] :=
Module[{},
R[Lambda_] = -300 000 * Lambda - 200 - 500 * Lambda - 30 (1 - Exp[-1000 * Lambda]) + SigEkvTest;
i = 0;
Lambda0 = LambdaZac;
Print[" Lambda0 = ", Lambda0, ", R0 = ", R[Lambda0]];
Lambda1 = Lambda0;
While[i < imax && TolDov < Abs[R[Lambda1]],
Lambda0 = Lambda1;
Lambda1 = Lambda0 - R[Lambda0] / R'[Lambda0];
i = i + 1;
Print[" i = ", i, ", Lambda(i) = ", PaddedForm[Lambda1, {7, 7}],
", R(i) = ", PaddedForm[R[Lambda1], {4, 2}]];
];]
```

```
NR[721.11, 0, 7, 0.000001];
```

```
Lambda0 = 0, R0 = 521.11
```

```
i = 1, Lambda(i) = 0.0015767, R(i) = 23.50
```

```
i = 2, Lambda(i) = 0.0016534, R(i) = 0.02
```

```
i = 3, Lambda(i) = 0.0016534, R(i) = 9.64 × 10-9
```

Program vypočítal $\Delta\lambda = 0,0016534$ a z toho $\bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p + \Delta\lambda = 0 + \Delta\lambda = \Delta\lambda = 0,0016534$ a ďalší postup je už opäť rovnaký ako v *Príklade 1*. Zložky deviatorického napätia sú

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \frac{3G}{\bar{\sigma}_{n+1}^{test}} \Delta\lambda \right) \mathbf{s}_{n+1}^{test} = 0,312144 \mathbf{s}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} 104,05 \text{ MPa} \\ 41,62 \text{ MPa} \\ -145,67 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

a umožňujú už určiť výslednú napätosť

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \begin{bmatrix} \sigma_{1n+1} \\ \sigma_{2n+1} \\ \sigma_{3n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} + \sigma_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170,71 \text{ MPa} \\ 108,28 \text{ MPa} \\ -79,00 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

Nová hodnota (následnej) medze sklzu teraz je

$$\bar{\sigma}_{kn+1} = 200 + 500\bar{\epsilon}_{n+1}^p + 30(1 - e^{-1000\bar{\epsilon}_{n+1}^p}) = 225,08 \text{ MPa}$$

Nová hodnota ekvivalentného von Misesovho napätia

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} \Big|_{n+1} = 225,08 \text{ MPa}$$

Kontrola hodnoty zaťažovacej funkcie (kontrola návratu napätia na zmenenú plochu plasticity)

$$f_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1} - \bar{\sigma}_{kn+1} = 225,08 - 225,08 = 0$$

Príklad 4

Predchádzajúci príklad riešte pomocou programu ANSYS

Riešenie

Úlohu vyriešime pomocou jediného priestorového pružne plastického konečného prvku tvaru kocky s jednotkovými stranami. Hlavné pomerné deformácie zadáme ako posunutia v smere hrán prvku s rovnakými hodnotami ako sú tieto deformácie. Na jednotkových dĺžkach prvku tak vyvoláme udané deformácie a dostaneme hľadanú napätosť.

Úloha sa v interaktívnom móde programu zadáva a počíta rovnakým postupom ako v *Príklade 2*, treba však zadať nelineárnu spevňovaciu krivku. Jediná zmena je takto v príkazoch pod č. 3, ktoré treba zadať takto:

3. Materiálové údaje

Lineárne:

Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 2e5, PRXY = 0.0,

Nelineárne:

Nonlinear, Inelastic, Rate Independent, Isotropic Hardening Plasticity, Mises Plasticity, Nonlinear, Sig0 = 200, R0 = 500, Rinf = 30, b = 1000, OK, Material, Exit;

V krokoch 8 a 9 dostaneme výsledky, ktoré súhlasia s analytickým riešením (Príklad 3).

8. Výpis zložiek napätia prvkov

Main Menu>General Postproc>List Results> Nodal Solution..., Stress, 1st Principal stress, OK;

NODAL RESULTS ARE FOR MATERIAL 1

NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQV
1	170.71	108.28	-78.997	249.71	225.08
2	170.71	108.28	-78.997	249.71	225.08
4	170.71	108.28	-78.997	249.71	225.08
6	170.71	108.28	-78.997	249.71	225.08
9	170.71	108.28	-78.997	249.71	225.08

10	170.71	108.28	-78.997	249.71	225.08
12	170.71	108.28	-78.997	249.71	225.08
14	170.71	108.28	-78.997	249.71	225.08

9. Výpis stredného normálového napätia (HPRE) a ekvivalentnej plastickej deformácie (EPEQ)

Main Menu>General Postproc>List Results> Element Solution..., Stress, Plastic equivalent stress, OK;

PRINT NL ELEMENT SOLUTION PER ELEMENT

ELEMENT=	1	SOLID186				
NODE	SEPL	SRAT	HPRE	EPEQ	CREQ	PLWK
2	0.0000	1.0000	66.667	0.16534E-02	0.0000	0.35142
6	0.0000	1.0000	66.667	0.16534E-02	0.0000	0.35142
4	0.0000	1.0000	66.667	0.16534E-02	0.0000	0.35142
1	0.0000	1.0000	66.667	0.16534E-02	0.0000	0.35142
9	0.0000	1.0000	66.667	0.16534E-02	0.0000	0.35142
10	0.0000	1.0000	66.667	0.16534E-02	0.0000	0.35142
12	0.0000	1.0000	66.667	0.16534E-02	0.0000	0.35142
14	0.0000	1.0000	66.667	0.16534E-02	0.0000	0.35142

V programoch MKP sa na analýzu pružne plastických úloh s nelineárnou spevňovacou krivkou materiálu často používa aj multilineárna aproximácia tejto krivky (pozri napr. manuál programu ANSYS, HYPLAS a i.). V takomto prípade je na výpočet $\Delta\lambda$ tiež potrebná Newton-Raphsonova iterácia, pretože zaťažovací krok môže byť dostatočne veľký na to, aby v sebe zahrňoval prechod cez viaceré multilineárne úseky spevňovacej čiary so skokovou zmenou plastického modulu H .

Literatúra

[Lit1] E.A. de Souza Neto, D. Perič, D.R.J. Owen: Computational Methods for Plasticity. *Theory and Applications*. Wiley, 2008

[1] Benča Š.: Výpočtové postupy MKP pri riešení lineárnych úloh mechaniky. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2004

[2] Benča Š.: Riešenie nelineárnych pevnostných úloh pomocou MKP. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2009