

D 13 Pružne plastická úloha rovinnej napätosti

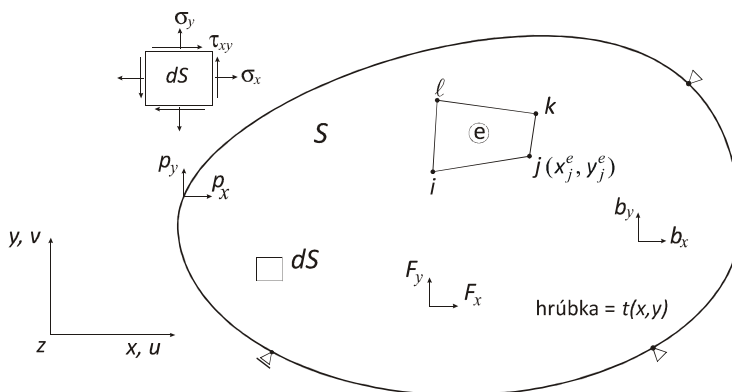
V dodatku [D 12] sme uviedli základné postupy riešenia pružne plastickej úlohy platné pre všeobecnú trojrozmernú napätosť, rovinnú deformáciu a rotačne symetrickú úlohu. Sú to úlohy pri ktorých všetky tri normálové zložky napätia sú voľné premenné. Pri rovinnej napätosti (pozri napr. [1]) však zložka kolmá na stredovú rovinu telesa je rovná nule (pričom ale zložka deviátora napätia v tomto smere nie je nulová) a uvedené vzťahy a postupy nie je možné použiť bez určitej modifikácie. Vzhľadom na častý výskyt tejto úlohy v praxi sa jej budeme venovať v tomto dodatku.

1. Rovinná napätosť pri elastickom zaťažovaní

Uvažujme zaťažené teleso v rovnovážnom stave, ktorého rovina (x,y) je rovinou symetrie (stredovou plochou) S (obr. 1). Všetky vonkajšie zaťaženia (vrátane reakcií) nech sú symetricky rozdelené po po relatívne malej hrúbke telesa $t(x,y)$; ich výslednice teda pôsobia v rovine S a spojité zaťaženia $\mathbf{p}(x,y)$ a $\mathbf{b}(x,y)$ sú na premennej z nezávislé. Za týchto predpokladov stačí pre riešenie pevnostnej úlohy telesa uvažovať len funkcie posunutia stredovej plochy telesa

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} \quad (1)$$

pretože všetky deformačné i napätové veličiny telesa možno z týchto funkcií vypočítať.



Obr. 1 Stredová plocha telesa a rovinný konečný prvok

Vo vektore zložiek napätia sú nenulové len zložky, ktoré ležia v rovine (x,y) , a preto hovoríme, že teleso (stena, membrána) je zaťažené rovinnou napätosťou

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \quad (2)$$

Vo vektore pomernej deformácie uvažujeme len tri zložky (materiál reaguje na rovinnú napätosť priečnou deformáciou ε_z , tú ale možno určiť z deformácií v stredovej rovine)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \equiv [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 2\varepsilon_{xy}]^T \quad (3)$$

Teraz už možno využiť postup podrobne uvedený v [1] pre všeobecné priestorové teleso, keď sa zavedú zjednodušenia platné pre rovinnú napätosť

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (4)$$

Pomerné deformácie v rovine (x,y) potom sú

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

Z fyzikálnych rovníc dostávame

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\mu\sigma_x + \sigma_y), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (6)$$

a z podmienky $\sigma_z = 0$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (7)$$

Invertovaním rovníc (6) dostaneme vzťahy pre výpočet napätí zo zložiek deformácie

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (8)$$

Pomernú deformáciu v smere osi z je teraz už možné vyjadriť pomocou pretvorení v rovine (x,y) , keď z (8) dosadíme do (7)

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (9)$$

V maticovom tvare možno teda fyzikálne (konštitutívne) vzťahy zapísať v tvare

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon} \quad (10)$$

kde matica materiálových konštánt je

$$\mathbf{D}^e = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

2. Von Misesov pružne plastický model rovinatej napätosti

Pri riešení pružne plastickej úlohy pre teleso zaťažené rovinnou napätosťou možno opäť uvažovať len tie deformačné a napäťové zložky, ktoré ležia v stredovej rovine, pretože ε_z sa aj v tomto prípade dá vyjadriť pomocou týchto zložiek. Využíva sa na to vzťah (9), kde sa pri vyjadrení ε_z^p uplatňuje nestlačiteľnosť materiálu pri plastickom tečení ($\mu = 0,5$)

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p = -\left[\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e) + \varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p \right] \quad (12)$$

Von Misesovo ekvivalentné napätie [D 11] $\bar{\sigma}$ potrebné do podmienky plasticity

$$f = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_k(\bar{\varepsilon}^p) = 0 \quad (13)$$

teraz je

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (14)$$

a vektor plastického tečenia

$$\mathbf{f} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} = \frac{1}{2\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y \\ 2\sigma_y - \sigma_x \\ 6\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Určenie napätia metódou elastický predictor/projekcia na najbližší bod

Skúšobné napätie sa určí z redukovaných rovníc

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} = \begin{bmatrix} \sigma_{0x} \\ \sigma_{0y} \\ \tau_{0xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \tau_{nxy} \end{bmatrix} + \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{D}_e \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (16)$$

a všeobecné rovnice *spätnej projekcie na najbližší bod* spevnenej plochy plasticity [D 12] potom sú

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} - \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{f}_{n+1} = \begin{bmatrix} \sigma_{0x} \\ \sigma_{0y} \\ \tau_{0xy} \end{bmatrix} - \Delta\lambda \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \frac{1}{2\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y \\ 2\sigma_y - \sigma_x \\ 6\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Ich rozpísaním a úpravou dostávame

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \frac{\sigma_{0x} + \sigma_{0y}}{1 + K\Delta\bar{\lambda}} \\ \sigma_x - \sigma_y &= \frac{\sigma_{0x} - \sigma_{0y}}{1 + 3G\Delta\bar{\lambda}} \\ \tau_{xy} &= \frac{\tau_{0xy}}{1 + 3G\Delta\bar{\lambda}} \end{aligned} \quad (18)$$

kde

$$K = \frac{E}{2(1-\mu)}, \quad \Delta\bar{\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{\bar{\sigma}}$$

Neznámy skalárny násobok $\Delta\bar{\lambda}$ musí mať takú hodnotu, aby bola splnená podmienka konzistencie

$$f_{n+1}(\Delta\bar{\lambda}) = \bar{\sigma}_{n+1}(\Delta\bar{\lambda}) - \bar{\sigma}_k(\Delta\bar{\lambda}) = 0 \quad (19)$$

kde

$$\bar{\sigma}_k(\Delta\bar{\lambda}) = \sigma_k + H\bar{\epsilon}_p = \sigma_k + H\Delta\lambda = \sigma_k + H\bar{\sigma}_{n+1}\Delta\bar{\lambda} \quad (20)$$

Vyjadrenie vzťahov na iteračné určenie $\Delta\bar{\lambda}$ je jednoduchšie pri použití kvadrátu podmienky (19)

$$q(\Delta\bar{\lambda}) = f_{n+1}^2(\Delta\bar{\lambda}) = \bar{\sigma}_{n+1}^2(\Delta\bar{\lambda}) - \bar{\sigma}_k^2(\Delta\bar{\lambda}) = 0 \quad (21)$$

Umocnením a úpravou ekvivalentného napätia (14) dostávame

$$\bar{\sigma}_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left[(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 12\tau_{xy}^2 \right] \quad (22)$$

a po dosadení z (18)

$$\bar{\sigma}_{n+1}^2 = \frac{(\sigma_{0x} + \sigma_{0y})^2}{4(1 + K\Delta\bar{\lambda})^2} + \frac{3(\sigma_{0x} - \sigma_{0y})^2 + 12\tau_{0xy}^2}{4(1 + 3G\Delta\bar{\lambda})^2} \quad (23)$$

Pomocná funkcia q (21) potom je

$$q(\Delta\bar{\lambda}) = \frac{(\sigma_{0x} + \sigma_{0y})^2}{4(1 + K\Delta\bar{\lambda})^2} + \frac{3(\sigma_{0x} - \sigma_{0y})^2 + 12\tau_{0xy}^2}{4(1 + 3G\Delta\bar{\lambda})^2} - \bar{\sigma}_k^2(\Delta\bar{\lambda}) = 0 \quad (24)$$

Z nelineárnej rovnice (24), čo je vlastne upravená podmienka konzistencie, sa skalárna hodnota $\Delta\bar{\lambda}$ vyjadri pomocou N-R iterácie (pozri kapitolu 2 v [2]). Po rozklade funkcie q v okolí $\Delta\bar{\lambda}$ do skráteneho Taylorovho radu, pre iteračný vzťah platí

$$\Delta\bar{\lambda}_{k+1} = \Delta\bar{\lambda}_k - \frac{q(\Delta\bar{\lambda}_k)}{q'(\Delta\bar{\lambda}_k)} \quad (25)$$

kde sme q' označili deriváciu funkcie q podľa $\Delta\bar{\lambda}$, pre ktorú podľa (24) a (20) dostávame

$$q'(\Delta\bar{\lambda}) = \frac{\partial q}{\partial \Delta\bar{\lambda}} = 2\bar{\sigma}_{n+1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{n+1}}{\partial \Delta\bar{\lambda}} - 2\bar{\sigma}_k \frac{\partial \bar{\sigma}_k}{\partial \Delta\bar{\lambda}} = 2\bar{\sigma}_{n+1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{n+1}}{\partial \Delta\bar{\lambda}} - 2H(\sigma_k + H\bar{\sigma}_{n+1}\Delta\bar{\lambda}) \left(\bar{\sigma}_{n+1} + \Delta\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\sigma}_{n+1}}{\partial \Delta\bar{\lambda}} \right) \quad (26)$$

Z (23) po odmocnení a derivovaní podľa $\Delta\bar{\lambda}$ získame posledný potrebný výraz pre iteračnú procedúru

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{n+1}}{\partial \Delta\bar{\lambda}} = -\frac{1}{\bar{\sigma}_{n+1}} \left(\frac{K(\sigma_{0x} + \sigma_{0y})^2}{4(1+K\Delta\bar{\lambda})^3} + \frac{3G[(\sigma_{0x} + \sigma_{0y})^2 + 12\tau_{0xy}^2]}{4(1+3G\Delta\bar{\lambda})^3} \right) \quad (27)$$

Výpočet $\Delta\bar{\lambda}$ a výsledného napätia σ_{n+1} si vysvetlíme na príklade (číselné výsledky vypočítal pomocný program uvedený na obr. 2).

Príklad 1

Teleso zaťažované rovinnou napätosťou je vyrobené z oceľového materiálu, ktorého vlastnosti pri pružne plastickom zaťažovaní aproximuje von Misesova zaťažovacia funkcia a lineárne spevňovanie. Pre vyšetrovanú materiálovú časticu telesa, ktorej predchádzajúci stav je bez napätia, treba z explicitných vzťahov metódy *elastický predictor/projekcia na najbližší bod* určiť výsledné hodnoty zložiek napätia σ_{n+1} , keď ju zdeformujeme pomernými deformáciami $\varepsilon_x = 0,002$ a $\varepsilon_y = -0,001$ a $\gamma_{xy} = 0,002$. Dané je $E = 200000$ MPa, $\sigma_k = 200$ MPa, $E_t = 100000$ MPa, $\mu = 0,3$. Požadovaná presnosť nech je $f_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1} - \bar{\sigma}_k < 0,001$ MPa.

Riešenie

Skúšobné napätie podľa (16) je

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{0x} \\ \sigma_{0y} \\ \tau_{0xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 373,6 \\ -87,9 \\ 153,8 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Kontrola podmienky plasticity

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_0 &= \sqrt{\sigma_{0x}^2 + \sigma_{0y}^2 - \sigma_{0x}\sigma_{0y} + 3\tau_{0xy}^2} = \sqrt{373,6^2 + (-87,9)^2 - 373,6(-87,9) + 3 \cdot 153,8^2} = \\ &= 501,1 \text{ MPa} > \sigma_k = 200 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Pretože ekvivalentné napätie je väčšie ako medza sklzu materiálu, vo vyšetrovanom bode dôjde k nelineárnej pružne-plastickej deformácii. Výsledné napätie v takomto prípade treba určiť z uvedených vzťahov spätnej integrácie platných pre rovinnú napätosť.

Začiatocné hodnoty pre výpočet napätia pri pružne-plasticom zaťažovaní sú $\Delta\bar{\lambda}_0 = 0$ a $\bar{\sigma}_{k0} = \sigma_k = 200$. Potom podľa (23) až (27) iteračný výpočet vykonal program (vzťahy neobsahujú matice, a preto sme zvolili program *Mathematica*) uvedený na obr. 2 a výsledky sú:

Zložky výsledného napätia vo vyšetrovanom bode telesa:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 266,0 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= -45,8 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= 103,9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Výsledná (spevnená) medza sklzu materiálu:

$$\bar{\sigma}_{kn+1} = 342,7 \text{ MPa}$$

Výsledná ekvivalentná plastická deformácia:

$$\bar{\varepsilon}_p = 7,135 \cdot 10^{-4}$$

```

(* Backward-Euler, Rovinna napätost'-explicitne *)
Off[General::spell,General::spell1]

(* Vstupne hodnoty *)
EE=200000; mi=0.3; Sigk0=200; G=EE/(2+2*mi); Et=100000; H=EE*Et/(EE-Et);

(* Štartovací bod *)
sxn=0;
syn=0;
sxy=0;

(* Prírastok deformácie *)
EpsX=0.002;
EpsY=-0.001;
EpsXY=0.002;

(* Skušobné elastické napätie *)
K=EE/2/(1-mi);
Kl=EE/(1-mi^2);
sx0=sxn+Kl*(EpsX+mi*EpsY);
sy0=syn+Kl*(EpsY+mi*EpsX);
sxy0=sxyn+Kl/2*(1-mi)*EpsXY;
(* Východzie hodnoty iterácie *)
La=0;
Sigk=Sigk0;
Sekv=0;
c1=(sx0+sy0)^2;
c2=3*(sx0-sy0)^2+12*sxy0^2;

(* Iteračná oprava *)
While [Abs[Sigk-Sekv]>0.001,
Sekv2=0.25*(c1/(1+K*La)^2+c2/(1+3*La*G)^2);
q=Sekv2-Sigk^2;
Sekv=Sqrt[Sekv2];
dSekv=-0.25/(Sekv)*(K*c1/(1+K*La)^3+3*G*c2/(1+3*G*La)^3);
(*dSekv=-1/(Sekv)*(K*c1/(1+K*La)^3+3*G*c2/(1+3*G*La)^3);*)
dq=2*Sekv*dSekv-2*(Sigk0+H*Sekv*La)*(H*Sekv+La*H*dSekv);
La=La-q/dq;
Sigk=Sigk0+H*La*Sekv];

(* Vyčíslenie napätia *)
A1=1+0.5*La*EE/(1-mi);
A2=1+3*La*G;
sps=(sx0+sy0)/A1;
sms=(sx0-sy0)/A2;
SXdef=(sps+sms)/2;
SYdef=(sps-sms)/2;
SXYdef=sxy0/A2;

(* Hodnota novej medze sklzu *)
SigkDef=Sigk;

(* Hodnota ekvivalentnej plastickej deformácie *)
EplastPruh=La*Sekv;

Print["Výsledky"/TableForm[{"SX =", SXdef,"MPa"},
{"SY =", SYdef,"MPa"},
{"SXY =", SXYdef,"MPa"},
{"SigK =", SigkDef,"MPa"},
{"EpsPlast =", EplastPruh}
}]]

```

Výsledky		
SX =	265.985	MPa
SY =	-45.7687	MPa
SXY =	103.918	MPa
SigK =	342.7	MPa
EpsPlast =	0.000713502	

Obr. 2 Program na určenie výsledného napätia rovinnej napätosti pomocou spätnej integrácie z explicitných vzťahov a výsledky výpočtu príkladu

Príklad 2

Riešte predchádzajúci príklad pomocou programu ANSYS.

Riešenie

Materiálovú časticu telesa môžeme nahradiť jediným konečným prvkom rovinatej napätosti s jednotkovou hrúbkou, ktorý bude mať udané materiálové vlastnosti. Problém so zadaním skosu γ_{xy} obídeme tak, že hrany prvku umiestnime do smeru hlavných pomerných pretvorení ε_1 a ε_2 (v týchto rezoch je γ nulové) a ich veľkosť vypočítame zo vzťahu

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,2} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\gamma_{xy})^2} = \frac{0,002 - 0,001}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(0,002 + 0,001)^2 + (0,002)^2} = \\ &= 0,0005 \pm 0,0018027 \rightarrow \varepsilon_1 = 0,0023027; \quad \varepsilon_2 = -0,0013027\end{aligned}$$

a pre smer ε_1 platí

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{0,002}{0,002 + 0,001} = \frac{2}{3} \rightarrow \varphi = 16,845^\circ$$

Teraz už možno úlohu úlohu v prostredí programu ANSYS realizovať týmto postupom:

1. Zadanie názvu úlohy

Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = RovNapatost1, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu

Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add..., Solid Quad 8 node 183, OK, Close;

3. Materiálové údaje

Lineárne

Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 2E5, PRXY = 0.3, OK,

Nelineárne

Nonlinear, Inelastic, Rate Independent, Isotropic Hardening Plasticity, Mises Plasticity, Bilinear, Yield Strss = 200, Tang Mod = 1E5, OK, Material, Exit;

4. Vytvorenie bodov natočenej plochy prvku (číslovanie je automatické)

Utility Menu>Work Plane>Offset WP by Increments..., Degrees = 16.845, 0, 0, OK;

Utility Menu>Work Plane>Local Coordinate Systems>Create Local CS>At WP Origin..., OK;

*Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS: X = 0, Y = 0, Apply,
X = 1, Y = 0, Apply,
X = 1, Y = 1, Apply,
X = 0, Y = 1, OK;*

5. Vytvorenie plochy prvku

Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Arbitrary>Through KPs: ↑KP1, ↑KP2, ↑KP3, ↑KP4, OK;

6. Vytvorenie prvku

Preprocessor>Meshing>Mesh Tool: Size Controls: Lines, Set: Pick All, NDIV = 1, OK;

(Preprocessor>Meshing>Mesh Tool): Mesh, Pick All, Close;

7. Upevnenie prvku v smere jeho hrán (v smere hlavných predĺžení) a zadanie ε_1 a ε_2

Preprocessor>Modeling>Move/Modify>Rotate Node CS>To Active CS ↑, Pick All;

Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes ↑, (pozri obr.)

P: 1, 8, 6, OK, UX, Value = 0, Apply,

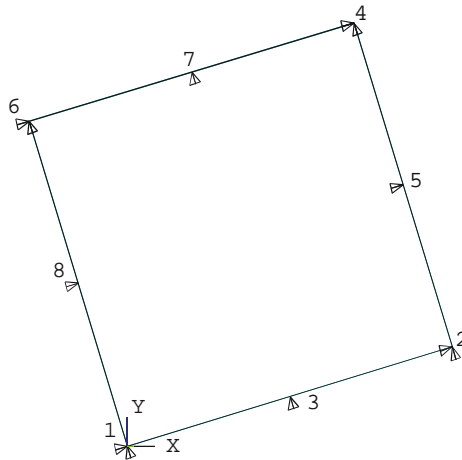
P: 1, 3, 2, OK, UY, Value = 0, Apply,

P: 2, 5, 4, OK, UX, Value = 0.0023027, Apply,

P: 6, 7, 4, OK, UY, Value = - 0.0013027, OK;

8. Riadiace údaje nelineárneho riešenia a výpočet

Main Menu>Solution>Analysis Type>Sol'n Controls..., Time at end of loadstep = 1, Number of substeps = 1, OK;
Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;



9. Výpis zložiek napätia prvku

Main Menu>General Postproc>List Results>Nodal Solution..., Stress, X-Component of stress, OK;

PRINT S NODAL SOLUTION PER NODE
THE FOLLOWING X,Y,Z VALUES ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	SX	SY	SZ	SXY	SYZ	SXZ
1	265.99	-45.766	0.0000	103.92	0.0000	0.0000
2	265.99	-45.766	0.0000	103.92	0.0000	0.0000
4	265.99	-45.766	0.0000	103.92	0.0000	0.0000
6	265.99	-45.766	0.0000	103.92	0.0000	0.0000

10. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy

Ansyes Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;

Dostali sme rovnaké výsledky ako z analytických vzťahov v predchádzajúcom príklade, čo potvrdzuje ich správnosť.

3. Maticová formulácia pružne plastických rovníc rovinnej napätosti

Uvedené analytické určenie napätosti pri pružne plastickom zaťažovacom kroku je síce elegantné a jednoduché, pokiaľ nás však zaujíma tvorba programu MKP pre riešenie pružne plastických úloh rovinnej napätosti, je potrebné vytvoriť základné vzťahy a uložiť potrebné hodnoty pre ďalší zaťažovací krok v maticovom tvare. V takom prípade sa stavové veličiny sa zapisujú do slúpcových matic (vektorov)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x, \varepsilon_y, 2\varepsilon_{xy}]^T, & \boldsymbol{\varepsilon}^e &= [\varepsilon_x^e, \varepsilon_y^e, 2\varepsilon_{xy}^e]^T, & \boldsymbol{\varepsilon}^p &= [\varepsilon_x^p, \varepsilon_y^p, 2\varepsilon_{xy}^p]^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T, & \mathbf{s} &= [s_x, s_y, s_{xy}]^T \end{aligned} \quad (28)$$

kde sa v deformačných veličinách uvažujú tenzorové zložky šmykových skosov ($2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$) a pre zložky deviatorického napätia pri $\sigma_z = 0$ platí

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} \quad (29)$$

kde

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Von Misesovo ekvivalentné napätie (14) sa teraz dá zapísať v tvare

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}^T \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}} \quad (31)$$

Podmienka plasticity (13) potom je

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}} - \bar{\sigma}_k(\bar{\epsilon}^p) = 0 \quad (32)$$

a jej výhodnejší kvadratický tvar

$$f_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_k^2(\bar{\epsilon}^p) = 0 \quad (33)$$

Vektor prírastku plastickej deformácie najjednoduchšie dostaneme využitím maticového vzorca pre derivovanie skalárnej kvadratickej formy

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^p = \Delta \lambda \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \Delta \lambda \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \right) = \frac{1}{2} \Delta \lambda \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{P}^T + \mathbf{P}) = \Delta \lambda \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P}^T = \Delta \lambda \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \quad (34)$$

kde, ako vidieť, pre vektor plasticity v tomto prípade sme dostali

$$\mathbf{f} = \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} \quad (35)$$

Pre prírastok ekvivalentnej plastickej deformácie máme

$$\Delta \bar{\epsilon}^p = \Delta \lambda \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{s}^T \boldsymbol{\sigma}} = \Delta \lambda \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}} \quad (36)$$

V prírastkovom kroku z času t_n do času t_{n+1} potom pre hodnoty elastického prediktora platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e \text{ test}} &= \boldsymbol{\epsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\epsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{test}} &= \mathbf{D}^e \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e \text{ test}} \\ \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{p \text{ test}} &= \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p \end{aligned} \quad (37)$$

kde $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$ je pre zaťažovací krok známy lineárne určený prírastok deformácie z prírastku vonkajšieho zaťaženia. Pomocou týchto hodnôt sa kontroluje podmienka plasticity (33). Vypočíta sa

$$f_2^{\text{test}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{test}})^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{test}} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_k^2(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{\text{test}}) \quad (38)$$

Ak je $f_2^{\text{test}} \leq 0$, testovacie hodnoty sú platné pre tento (elastický) zaťažovací krok, v opačnom prípade treba tieto hodnoty opraviť plastickým korektorom t.j. použiť vzťahy, ktoré testovaciu napätosť vrátia na (zmenenú) čiaru plasticity.

4. Rovnice návratu napätového bodu na čiaru plasticity (plastický korektor)

Prvá rovnica, ktorú musí hľadané napätie $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ v prípade pružne plastickej deformácie spĺňať, je podmienka konzistencie v čase t_{n+1} (33)

$$f_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_k^2(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}) = 0 \quad (39)$$

Ekvivalentná plastickej deformácia sa v zaťažujúcom kroku zmení o prírastok (36) na

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p + \Delta \lambda \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \quad (40)$$

a poslednou v tejto sústave nelineárnych rovníc je implicitný vzťah spätnej Eulerovej metódy [D12] pre výpočet elastickej deformácie

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e \text{ test}} - \Delta \lambda \mathbf{f}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{e \text{ test}} - \Delta \lambda \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (41)$$

Po vhodnej, nie práve najjednoduchšej, úprave možno sústavu nelineárnych rovníc (39) až (41) previesť na jedinou nelineárnu rovnicu s jedinou neznámou $\Delta \lambda$. Vyjdeme z elastickej konštitutívnej rovnice

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etest} - \Delta\lambda \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \Delta\lambda \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \quad (42)$$

Dosadením a úpravami postupne dostaneme

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{P}) \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{P})^{-1} \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= (\mathbf{D}^{e-1} + \Delta\lambda \mathbf{P})^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \end{aligned} \quad (43)$$

Po určení $\Delta\lambda$ bude podľa (43) možné určovať napätie zo vzťahu

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \hat{\mathbf{D}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \quad (44)$$

alebo, pretože $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)$, podľa

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \hat{\mathbf{D}} \mathbf{D}^{e-1} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} \quad (45)$$

kde

$$\hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{D}^{e-1} + \Delta\lambda \mathbf{P})^{-1} \quad (46)$$

5. Určenie plastického násobku z podmienky konzistencie

Vo vzťahoch pre výpočet napätia z predchádzajúceho odstavca vystupuje už len jedna neznáma, plastický násobok $\Delta\lambda$. Jeho veľkosť musí byť taká, aby bola splnená podmienka konzistencie (39). Priame dosadenie maticového vzťahu pre $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ do tejto podmienky vedie na nepríjemnú maticovú formu nelineárnej rovnice, a preto sa využíva a do programov MKP implementuje jej jednoduchší explicitný tvar, ktorého odvodenie si teraz ukážeme.

Pri izotropnom elastickom materiáli, čo je náš prípad, majú matice \mathbf{D}^e a \mathbf{P} rovnaké vlastné vektory a pomocou ich ortogonálnej transformácie možno ich v podmienke konzistencie previesť na diagonálne a z toho dostať explicitný tvar rovnice na výpočet $\Delta\lambda$. Transformačné vzťahy sú

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda}_p \mathbf{Q}^T; \quad \mathbf{D}^e = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda}_D \mathbf{Q}^T; \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \quad (47)$$

kde

$$\boldsymbol{\Lambda}_p = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Lambda}_D = \begin{bmatrix} E/(1-\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (48)$$

a \mathbf{D}^e udáva rovnica (11).

Teraz zo (43) dostávame

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{P})^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} \quad (49)$$

kde

$$\boldsymbol{\Gamma} = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Lambda}_D \boldsymbol{\Lambda}_p)^{-1} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\Delta\lambda E}{3(1-\mu)}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (1 + 2\Delta\lambda G)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (1 + 2\Delta\lambda G)^{-1} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Dosadením (49) do podmienky konzistencie (39) dostaneme jej zjednodušený explicitný tvar

$$\frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test})^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Lambda}_p \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{test} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_k^2 (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) = \frac{1}{2} \phi^2 - \frac{1}{3} S^2 = 0 \quad (51)$$

kde po vynásobení matic je

$$\phi^2 = \frac{A}{(1+a\Delta\lambda)^2} + \frac{B}{(1+b\Delta\lambda)^2} + \frac{C}{(1+b\Delta\lambda)^2} \quad (52)$$

s hodnotami

$$A = \frac{1}{6}(\sigma_x^{test} + \sigma_y^{test})^2; \quad B = \frac{1}{2}(\sigma_x^{test} - \sigma_y^{test})^2; \quad C = 2(\tau_{xy}^{test})^2$$

$$a = \frac{1}{3}\Delta\lambda E / (1 - \mu); \quad b = 2G$$

Pre medzu sklzu na konci zaťažujúceho kroku platí

$$\bar{\sigma}_k^2(\bar{\epsilon}_{n+1}^p) = S^2 = \sigma_k + H\left(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\phi\right) \quad (53)$$

Z nelineárnej rovnice (51) treba teraz ešte vypočítať plastický násobok $\Delta\lambda$.

6. Výpočet plastického násobku pomocou Newton-Raphsonovej metódy

Hľadáme takú hodnotu plastického násobku $\Delta\lambda$, pri ktorom je rovnica (51) splnená s dostatočnou presnosťou. Inak povedané pri Newton-Raphsonovej metóde (pozri napr. [2]) sa hodnota $\Delta\lambda$ postupne mení tak, aby funkcia

$$q(\Delta\lambda) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{3}S^2 \quad (54)$$

konvergovala k nule. Klasický zápis iteračného vzorca pre rovnicu s jednou neznámou je jednoduchý

$$\Delta\lambda^{k+1} = \Delta\lambda^k - \frac{q(\Delta\lambda^k)}{q'(\Delta\lambda^k)} \quad (55)$$

kde v našom prípade

$$q'(\Delta\lambda^k) = \frac{\partial q}{\partial \Delta\lambda} = \phi \frac{\partial \phi}{\partial \Delta\lambda} - \frac{2}{3}S \frac{\partial S}{\partial \Delta\lambda} \quad (56)$$

Potrebné parciálne derivácie do q' sa dajú určiť z (52) a (53)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \Delta\lambda} = -\frac{1}{2\phi} \left(\frac{2Aa}{(1+a\Delta\lambda)^3} + \frac{2Bb}{(1+b\Delta\lambda)^3} + \frac{2Cb}{(1+b\Delta\lambda)^3} \right) \quad (57)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta\lambda} = H\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\phi + \Delta\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \Delta\lambda} \right) \quad (58)$$

7. Spracovanie maticových vzťahov v jazyku FORTRAN

V programoch MKP sa uvedené vzťahy vyskytujú vo forme podprogramu, ktorý sa volá v cykle pre každý integračný bod prvkov výpočtového modelu telesa. Záverom uvedieme v tejto časti aj ukážku takéhoto spracovania a aby to nebolo celkom suchopárne vo forme spustiteľného ilustračného programu. Program, samozrejme, vzhľadom na jeho neúplnosť, nie je určený na výpočty a treba si tiež uvedomiť, že pri nelineárnej úlohe, napätia v integračných bodoch prvkov ovplyvňuje aj globálna iterácia rovnovážnych rovníc.

Fortranovská ukážka je založená na vzťahoch uvedených v predchádzajúcich odstavcoch a spolu s komentármi by mala byť zrozumiteľná pre záujemcu, ktorý ovláda základy programovacieho jazyka FORTRAN. V ukážke je pre porovnanie naprogramovaný výpočet príkladu, ktorý sa vyššie riešil pomocou iných programov.

```

PROGRAM NAVRAT
C*****
C Navrat napatoveho bodu na plochu plasticity *
C*****
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION
      1 STRES(3) ,SVECT(3), EPS(3),

```

```

2     A(3,3),B(3,3),P(3,3),D(3,3)
DATA R0 ,R1 ,R2 ,R3 ,R4 ,R6
1     /0.D0 ,1.D0 ,2.D0 ,3.D0 ,4.D0 ,6.D0 /
DATA ALLOW / 0.0001D0 /
100  FORMAT(/' Prekrocil sa maximalny pocet iteracii'/)
200  FORMAT(' Medza sklzu =',F10.2)
300  FORMAT(' Napatia SX, SY, SXY =',3F10.2)
ROOT3 = SQRT(R3)
DLAMBDA = R0
I = 0
EPEKV = 0.0D0
E = 2.0D5
POIS = 0.3D0
F = E/(R3*(R1-POIS))
G = E/(R2*(R1+POIS))
CALL MATICA(D) !Vypocet matice materialovych konstant De
EPS(1) = 2.0D-3 !Zadane zlozky prirastku deformacie
EPS(2) = -1.0D-3
EPS(3) = 2.0D-3
STRES(1) = D(1,1)*EPS(1)+D(1,2)*EPS(2) !Zlozky testovacieho napatia
STRES(2) = D(2,1)*EPS(1)+D(2,2)*EPS(2)
STRES(3) = D(3,3)*EPS(3)
H = 2.0D5 !Plasticky modul bilinearneho spevnovania
SIGK0 = 2.0D2 !Zaciatocna medza sklzu
A1 = (STRES(1)+STRES(2))*(STRES(1)+STRES(2))
A2 = (STRES(1)-STRES(2))*(STRES(1)-STRES(2))
A3 = R2*STRES(3)*STRES(3)
DLAMBDA = R0
EPSTN = EPEKV
SQ2D3 = SQRT(R2/R3)
I = 0
210  I = I+1 !Cyklus iteracneho vypoctu DeltaLambda N-R metodu
D1 = R1+DLAMBDA*F
D2 = R1+R2*DLAMBDA*G
FI = A1/(R6*D1*D1)+A2/(R2*D2*D2)+A3/(D2*D2)
FI = SQRT(FI)
DFI = -R2*A1*F/(R6*D1*D1*D1)-R4*A2*G/(R2*D2*D2*D2)
1     -R4*A3*G/(D2*D2*D2)
DFI = DFI/(R2*FI)
EPEKV = EPSTN+DLAMBDA*FI*SQRT(R2/R3)
SIGK = SIGK0+H*EPEKV
DSIGK = H*SQ2D3*(FI+DLAMBDA*DFI)
GFCIA = FI*FI/R2-SIGK*SIGK/R3
DGFCIE = FI*DFI-R2*SIGK*DSIGK/R3
DLAMBDA = DLAMBDA-GFCIA/DGFCIE
IF(GFCIA.GT.ALLOW) GOTO 210
IF(I.GT.50)write(*,100)

C
P(1,1) = R2/R3 !P matica
P(1,2) = -R1/R3
P(1,3) = R0
P(2,1) = -R1/R3
P(2,2) = R2/R3
P(2,3) = R0
P(3,1) = R0
P(3,2) = R0
P(3,3) = R2
CALL INVERT(D,A) !Vypocet potrebnych invertovanych matic
DO 220 I = 1,3
DO 220 J = 1,3
D(I,J) = A(I,J)+DLAMBDA*P(I,J)
220  CONTINUE
CALL INVERT(D,B)
DO 230 I = 1,3
DO 230 J = 1,3
D(I,J) = R0
DO 230 K = 1,3
D(I,J) = D(I,J)+B(I,K)*A(K,J)
230  CONTINUE
DO 240 I = 1,3 !Vypocet napatia
SVECT(I) = R0
DO 240 J = 1,3
SVECT(I) = SVECT(I)+D(I,J)*STRES(J)
240  CONTINUE
DO 250 I = 1,3
STRES(I) = SVECT(I)
250  CONTINUE
STRES(4) = R0
C
Vypis vysledkov na obrazovku monitora
write(*,300)stres(1),stres(2),stres(3)
write(*,200)SIGK
STOP
END

SUBROUTINE MATICA(D)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

DIMENSION D(3,3)
DATA R0,R1,R2/0.0D0,1.0D0,2.0D0/
E = 2.0D5
POIS = 0.3D0
DO 10 ISTRE=1,3
DO 10 JSTRE=1,3
10  D(ISTRE,JSTRE)=R0

```

```

CONST=E/(R1-POIS*POIS)
D(1,1)=CONST
D(2,2)=CONST
D(1,2)=CONST*POIS
D(2,1)=CONST*POIS
D(3,3)=(R1-POIS)*CONST/R2
RETURN
END

SUBROUTINE INVERT(A,B)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION A(3,3),B(3,3)
A11 = A(1,1)
A12 = A(1,2)
A13 = A(1,3)
A21 = A(2,1)
A22 = A(2,2)
A23 = A(2,3)
A31 = A(3,1)
A32 = A(3,2)
A33 = A(3,3)
T1 = A22*A33 - A32*A23
T2 = A23*A31 - A21*A33
T3 = A21*A32 - A22*A31
DETER = A11*T1 + A12*T2 + A13*T3
IF(DETER.EQ.0.0) stop
DENOM = 1./DETER
B(1,1) = T1*DENOM
B(2,1) = T2*DENOM
B(3,1) = T3*DENOM
B(1,2) = (-A12*A33 + A32*A13)*DENOM
B(2,2) = ( A11*A33 - A31*A13)*DENOM
B(3,2) = (-A11*A32 + A12*A31)*DENOM
B(1,3) = ( A12*A23 - A13*A22)*DENOM
B(2,3) = (-A11*A23 + A21*A13)*DENOM
B(3,3) = ( A11*A22 - A21*A12)*DENOM
RETURN
END

```

Výsledky

```

Napätia SX, SY, SXY = 265.99 -45.77 103.92
Medza sklzu = 342.67
Stop - Program terminated.

Press any key to continue

```

8. Konzistentný tangenciálny materiálový modul

Globálna tangenciálna matica tuhosti výpočtového modelu MKP sa tvorí formou usporiadanej sumácie tangenciálnych matíc tuhosti prvkov [1]

$$\mathbf{K}_T^e = \int_{S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (59)$$

pričom pri materiálovo nelineárnej úlohe je matica \mathbf{D} tzv. *konzistentný* tangenciálny materiálový modul prvku. Pojem konzistentný vyjadruje požiadavku, aby jeho hodnota v každom iteračnom kroku bola konzistentná s integračnou procedúrou, ktorej výsledkom je vzťah pre výpočet napätia $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. Definícia tangenciálneho materiálového modulu je

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etest}} \quad (60)$$

Rovnosť derivácií v (60) vyplýva z toho, že platí

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{etest} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad (61)$$

Konzistentná linearizácia lokálnych materiálových matíc prvkov vytvorí globálnu tangenciálnu maticu tuhosti v takej forme, ktorá zaručí kvadratickú konvergenciu globálnej Newton-Raphsonovej iterácie úlohy v zaťažovacom kroku.

Pri odvodení matice \mathbf{D} vyjdeme z diferenciácie vzťahu pre napätie (42)

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = d\mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{test} - d\Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \Delta\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (62)$$

a po podobnej úprave ako v (43) dostávame

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \hat{\mathbf{D}}(d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{test} - d\Delta\lambda \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \quad (63)$$

Zostáva ešte vyjadriť v (63) $d\Delta\lambda$ z podmienky konzistencie.

Diferencovanie podmienky konzistencie (39) dáva (pozn.: $d(\mathbf{x}^T \mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T d\mathbf{x}$)

$$df_2 = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{2}{3} \bar{\sigma}_k H d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = 0 \quad (64)$$

Zo (40) dostávame

$$d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = d\Delta\lambda a + \frac{2}{3} \frac{\Delta\lambda}{a} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (65)$$

kde

$$a = \left(\frac{2}{3} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \bar{\sigma}_k$$

Dosadíme (65) do (64)

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{2}{3} \bar{\sigma}_k H \left(d\Delta\lambda a + \frac{2}{3} \frac{\Delta\lambda}{a} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\right) = 0 \quad (66)$$

a po dosadení za a sa rovnica zjednoduší na

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{4}{9} \frac{H \bar{\sigma}_k^2}{b} d\Delta\lambda = 0 \quad (67)$$

kde

$$b = 1 - \frac{2}{3} H \Delta\lambda$$

Teraz dosadíme (63) do (67)

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{D}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{test} - d\Delta\lambda \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{4}{9} \frac{H \bar{\sigma}_k^2}{b} d\Delta\lambda = 0 \quad (68)$$

a z toho hľadaný diferenciál je

$$d\Delta\lambda = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{D}}}{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{4}{9} \frac{H \bar{\sigma}_k^2}{b}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{test} \quad (69)$$

Využitie tohto vzťahu v (63) dáva výsledný vzťah pre prírastok napätia

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{test} \quad (70)$$

s konzistentným tangenciálnym modulom

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}} - \frac{\hat{\mathbf{D}} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{D}}}{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{4}{9} \frac{H \bar{\sigma}_k^2}{b}} = \hat{\mathbf{D}} - \frac{\hat{\mathbf{D}} \mathbf{s}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}^T \hat{\mathbf{D}}}{\mathbf{s}_{n+1}^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{s}_{n+1} + \frac{4}{9} \frac{H \bar{\sigma}_k^2}{b}} \quad (71)$$

Pokiaľ teda v programe MKP na výpočet pružne plastickej úlohy telesa zaťaženého rovinnou napätosťou využijeme prírastkový výpočet napätia podľa (42) až (45), na zaručenie kvadratickej konvergencie Newton-Raphsonovej metódy pri riešení globálnej sústavy nelineárnych rovníc rovnováhy uzlových bodov je potrebné pri výpočte tangenciálnych matíc prvkov používať materiálový modul (71). Použitie klasického tangenciálneho materiálového modulu (elastoplastic continuum tangent operator [2])

$$\mathbf{D}_{cont} = \mathbf{D}^e - \frac{9G^2}{\bar{\sigma}_k^2 (3G + H)} \mathbf{ss}^T \quad (72)$$

vedie k rapídному poklesu konvergencie a v súčasnosti sa v komerčných programoch MKP už ani nepoužíva.

9. Určenie konzistentného materiálového modelu v jazyku FORTRAN

Podľa vzťahov predchádzajúcej časti sme spracovali program MATMODUL2D na určenie konzistentného tangenciálneho materiálového modulu rovinnej napätosti s lineárnym izotropným spevňovaním v jazyku FORTRAN. V reálnom programe MKP vystupuje táto časť ako podprogram volaný pre každý integračný bod z podprogramu, ktorý počíta tangenciálnu maticu tuhosti prvku. Vstupné premenné do takéhoto podprogramu prichádzajú ako parametre volacieho príkazu, my sme ich zadali priamo v časti *vstupné hodnoty*. (Prevzali sme ich z príkladu 18.1 v [2].)

```
PROGRAM MATMODUL2D
C*****
C KONZISTENTNY MATERIALOVY MODUL VON MISES 2D *
C*****
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION
1 D(3,3),A(3,3),P(3,3),AVECT(3),BVECT(3),
3 STRES(3),B(3,3)
DATA R0 ,R1 ,R2 ,R3 ,R4 ,R9
1 /0.0D0 ,1.0D0 ,2.0D0 ,3.0D0 ,4.0D0 ,9.0D0/

C Vstupne hodnoty
E=2.0D5
H=2.0D5
POIS=R0
DLAMBDA=6.6851D-4
STRES(1)=385.3D0
STRES(2)=197.9D0
STRES(3)=R0
SIGEF=333.7D0
SIGK=333.7D0

C
BETA = R1-H*DLAMBDA/(R3*SIGEF)
DO 10 I=1,3
DO 10 J=1,3
10 D(I,J)=R0
C Vypocet elastickej matice De
CONST=E/(R1-POIS*POIS)
D(1,1)=CONST
D(2,2)=CONST
D(1,2)=CONST*POIS
D(2,1)=CONST*POIS
D(3,3)=(R1-POIS)*CONST/R2
D(4,4)=R1
C Vycislenie P-matice
P(1,1) = R2/R3
P(1,2) = -R1/R3
P(1,3) = R0
P(2,1) = -R1/R3
P(2,2) = R2/R3
P(2,3) = R0
P(3,1) = R0
P(3,2) = R0
P(3,3) = R2
C Vypocet rozsiarenej D-matice
CALL INVERT(D,A)
DO 120 I=1,3
DO 120 J=1,3
B(I,J) = A(I,J)+DLAMBDA*P(I,J)
120 CONTINUE
CALL INVERT(B,A)
C Vypocet konzistentnej tangencialnej matice
DO 140 I=1,3
AVECT(I) = R0
DO 140 J=1,3
AVECT(I) = AVECT(I)+P(I,J)*STRES(J)
140 CONTINUE
DO 150 I=1,3
BVECT(I) = R0
DO 150 J=1,3
BVECT(I) = BVECT(I)+A(I,J)*AVECT(J)
150 CONTINUE
RMENOV = R0
DO 160 I=1,3
160 RMENOV = RMENOV+AVECT(I)*BVECT(I)
BETA = R1-R2*H*DLAMBDA/R3
H2 = R4*H*SIGK*SIGK/(R9*BETA)
RMENOV = RMENOV+H2
DO 170 I=1,3
DO 170 J=1,3
B(I,J) = BVECT(I)*BVECT(J)
170 CONTINUE
DO 180 I=1,3
DO 180 J=1,3
D(I,J) = A(I,J)-B(I,J)/RMENOV
180 CONTINUE
WRITE(*,11)
WRITE(*,12)D
11 FORMAT(' D = ')
```

12 FORMAT(3f15.3)

STOP
END

Program vypísal tieto členy konzistentného tangenciálneho modulu:

```
D =
  99868.323    50710.778    .000
  50710.778    27969.175    .000
   .000        .000        742.379
Stop - Program terminated.
```

V tabuľke 1 sme uviedli výsledky iteračnej procedúry testovacieho programu, ktorý ilustruje efektívnosť použitia tangenciálneho materiálového modulu konzistentného s integračnou procedúrou (tretí stĺpec). *Fnorma* predstavuje normu zvyškových (nerovnovážnych) uzlových síl výpočtového modelu a *ite* je číslo iteračného kroku. Prvé dva stĺpce v tabuľke udávajú tieto hodnoty pri použití elastického materiálového modulu a klasického modulu spojitaj integrácie. Pri iteračnej procedúre sa vyžadovalo, aby *Fnorma* klesla pod hodnotu 0,001.

Tabuľka 1

Elastický materiálový modul D_e	Modul spojitaj integrácie D_{kont}	Konzistentný modul D_{konz}
ite = 1 Fnorma = 81.9361	ite = 1 Fnorma = 81.9361	ite = 1 Fnorma = 81.9361
ite = 2 Fnorma = 45.0528	ite = 2 Fnorma = 18.1286	ite = 2 Fnorma = 4.06090
ite = 3 Fnorma = 24.1507	ite = 3 Fnorma = 6.25226	ite = 3 Fnorma = .142896E-02
ite = 4 Fnorma = 12.7373	ite = 4 Fnorma = 1.70708	ite = 4 Fnorma = .113480E-06
ite = 5 Fnorma = 6.64959	ite = 5 Fnorma = .430342	
ite = 6 Fnorma = 3.44982	ite = 6 Fnorma = .104781	
ite = 7 Fnorma = 1.78315	ite = 7 Fnorma = .250916E-01	
ite = 8 Fnorma = .919702	ite = 8 Fnorma = .595902E-02	
ite = 9 Fnorma = .473786	ite = 9 Fnorma = .140928E-02	
ite = 10 Fnorma = .243908	ite = 10 Fnorma = .332571E-03	
ite = 11 Fnorma = .125520		
ite = 12 Fnorma = .645826E-01		
ite = 13 Fnorma = .332255E-01		
ite = 14 Fnorma = .170925E-01		
ite = 15 Fnorma = .879277E-02		
ITERACIA CISLO = 15 PREKROCIL SA LIMITNY POCET ITERACII		

Literatúra

- [1] Benča Š.: Výpočtové postupy MKP pri riešení lineárnych úloh mechaniky. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2004
- [2] Benča Š.: Riešenie nelineárnych pevnostných úloh pomocou MKP. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2009