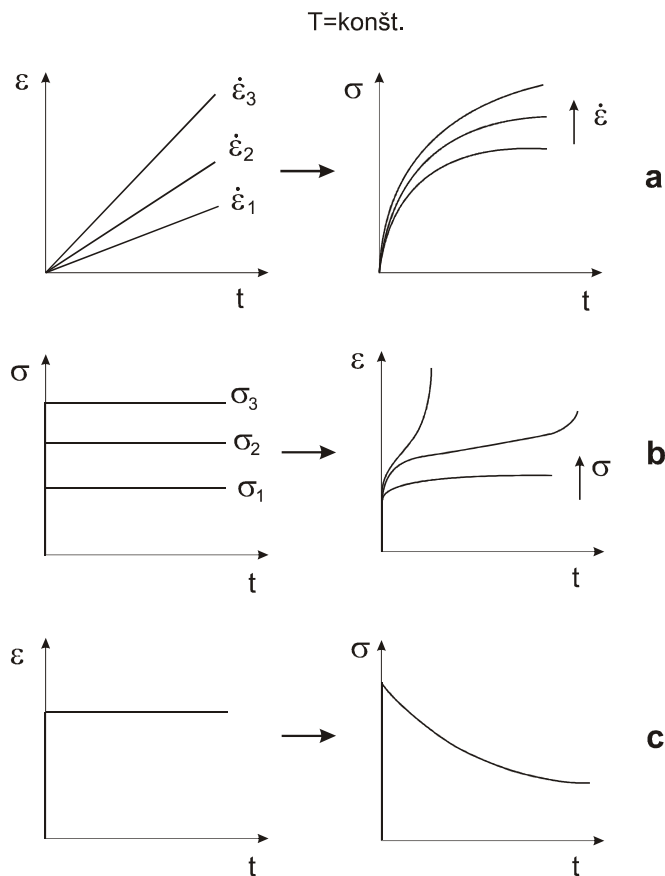


D 14 Viskoelasticita

Pružne plastické konštitutívne teórie, s ktorými sme sa zoberali v častiach D 10 až D 13, patria do kategórie tzv. časovo nezávislých teórií. Umožňujú tvoriť časovo nezávislé materiálové modely pre pružne plastické úlohy pri ktorých odozva materiálu je nezávislá od časovej zmeny zaťažujúcich síl a od časového intervalu, v ktorom sa aplikuje zaťaženie. Tzv. pseudočas sa v nich využíva len na sledovanie histórie a stavu (nelineárneho) zaťažovacieho procesu, bez vlastného fyzikálneho významu.

Pri úlohách kde *deformácia* materiálu je významne ovplyvnená časovým priebehom a dĺžkou časového intervalu zaťaženia (a často aj teplotou), sa využívajú tzv. *viskoelastické* alebo *viskoplastické* konštitutívne vzťahy (viskoplasticite sa budeme venovať neskôr) a z nich odvodené materiálové modely. Uplatňujú sa pri kovo, dreve, polyméroch, skle, betóne, zeminách, živej tkáni, asfaltových zmesiach a ďalších hustých amorfných materiáloch na hranici medzi pevnou látkou a tekutinou. Tieto materiály sa vyznačujú kombináciou vlastností pružného, resp. pružne plastického telesa a viskózne tekutiny. Základné vlastnosti takéhoto materiálu možno dobre ilustrovať aj na experimentálnych výsledkoch jednoosového zaťaženia kovovej vzorky (uzávery však platia aj pre iný typ viskoelastického materiálu) zaťažovanej *pri vyššej konštantnej teplote* v určitom časovom intervale (obr.1).

Obr.1a ukazuje rozdielne tvary ťahového diagramu materiálu pri rozdielnych rýchlostiach deformácie. Vo všeobecnosti modul pružnosti je málo závislý od rýchlosti deformácie, ale medza sklzu, ako aj spevňovacia krivka, sú na rýchlosť deformácie a teplotu citlivé. Pri vyššej teplote dokonca medza sklzu úplne vymizne.

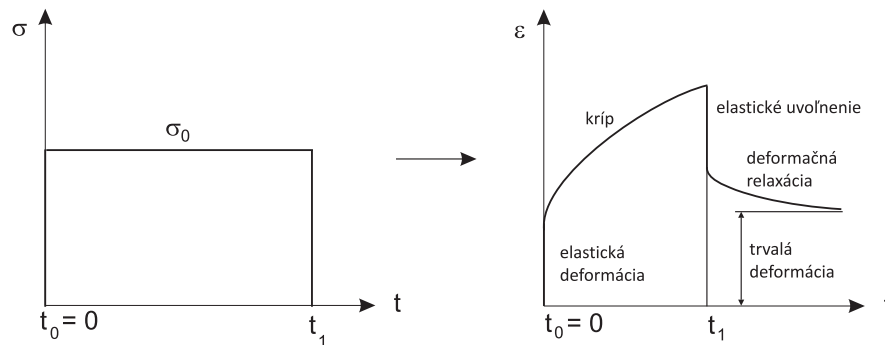


Obr. 1 Dôsledky časovo závislej deformácie kovového materiálu pri vyššej konštantnej teplote: a - závislosť napätia od rýchlosti deformácie, b - krípová deformácia (tečenie materiálu) pri konštantnom napätí, c - relaxácia napätia pri konštantnej deformácii

Na obr.1b vidieť ďalší dôsledok časovej závislosti zaťaženého materiálu, tzv. *tečenie alebo kríp* (creep). Pri konštantnom zaťažení na rôznej úrovni dochádza v dostatočne dlhom časovom intervale k nelineárnemu rozvoju nevratných deformácií. Rýchlosť krípovej deformácie sa zrýchľuje pri vyšších hodnotách zaťaženia a v celkovom časovom intervale sa mení: Prvý časový interval je charakterizovaný veľkou rýchlosťou deformácie a nazýva sa *primárny kríp*, druhý interval má kvázi konštantnú rýchlosť deformácie, je to oblasť *sekundárneho krípu*. Pri vysokých zaťaženiach alebo pri dlhodobom zaťažovaní môže krípová deformácia dospieť do *terciálneho štádia* so zrýchľujúcou sa deformáciou, ktorá môže dosieť až do krípového lomu.

Tretí dôsledok časovej závislosti materiálu je *napätová relaxácia*, ktorej typický priebeh znázorňuje obr. 1c. Pri relaxačnom teste sa vzorka rýchle natiahne na predpísanú konštantnú jednoosovú deformáciu a v tomto stave sa ponechá dlhší časový interval. Viskózne vlastnosti materiálu vedú pri tom k plynulému poklesu hodnoty napätia v sledovanom časovom intervale. Možnosť výpočtárskej analýzy napätvej relaxácie sa využíva napr. pri návrhu predpätých strojných častí.

Typická reakcia viskoelastického materiálu na dostatočne dlho trvajúce zaťaženie s nasledujúcim úplným odľahčením je znázornená na obr. 2. Po krípvom tečení materiál na odľahčenie reaguje viac alebo menej výrazným pružným uvoľnením deformácie a jej následnou viskóznou relaxáciou; po jej doznení zostávajú v materiáli trvalé deformácie.



Obr.2 Zaťaženie a odľahčenie viskoelastického materiálu

Teória viskoelasticity sa vyvinula práve na matematickú simuláciu uvedených časovo závislých vlastností a charakteristík materiálu, ktoré za určitých zaťažovacích a teplotných podmienok viac alebo menej vykazujú okrem pružných vlastností aj vlastnosti tečenia s určitým stupňom viskozity. S viskozitou sa predovšetkým stretávame v mechanike tekutín, kde pre šmykové napätie τ viskózne tekutiny platí Newtonov zákon viskozity

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1)$$

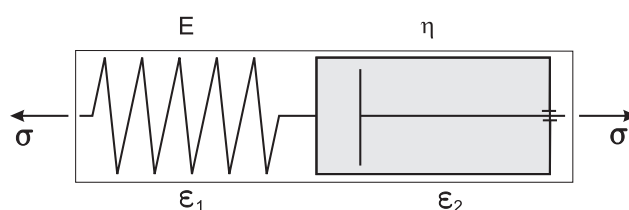
z ktorého vyplýva, že napätie v newtonovskej tekutine je pri konštantnej teplote lineárne úmerné rýchlosti šmykovej deformácie γ , resp. gradientu rýchlosti v smere kolmom na prúdenie tekutiny, pričom konštantou úmernosti je koeficient dynamickej viskozity tekutiny μ . V teórii viskoelasticity sa tento vzťah zovšeobecňuje aj na normálové napätie σ ťahaného viskózneho prúta

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \eta \dot{\varepsilon} \quad (2)$$

kde η je koeficient viskozity materiálu a $\dot{\varepsilon}$ je rýchlosť normálovej deformácie. Viskózne vlastnosti prúta si potom môžeme predstaviť vo forme tmiča naplneného viskóznou tekutinou, v ktorom napätie je úmerné rýchlosti deformácie podľa (2). Kombináciou lineárnych pružných a lineárnych viskózných vlastností materiálu možno tvoriť *lineárne viskoelastické materiálové modely*, t.j. modely, pri ktorých platí lineárny vzťah medzi napätím a deformáciou pre ľubovoľný daný čas, pričom, pravda, závislosť týchto veličín *od času* môže byť nelineárna.

Jednorozmerné viskoelastické modely

- a) *Maxwellov materiálový model* pozostáva z pružného člena s modulom pružnosti E a viskózneho člena s viskozitou η , ktoré sú zapojené do série (obr. 3). Celková pomerná deformácia sa pri takomto zapojení



Obr. 3 Maxwellov materiálový model

rovná súčtu deformácií pružného a viskózneho člena, pričom napätie oboch členov je rovnaké. Pre model potom platia tieto rovnice

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma}{\eta}, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

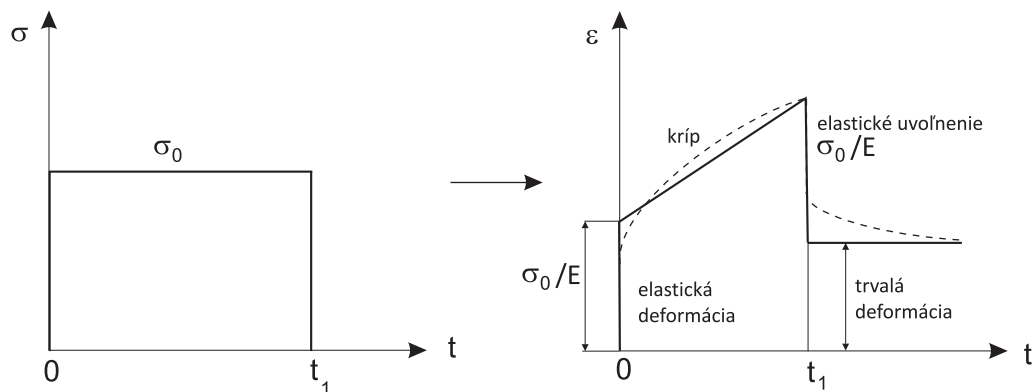
Diferencovaním poslednej rovnice a dosadením za $\dot{\varepsilon}_1$ a $\dot{\varepsilon}_2$ dostávame konštitutívny vzťah pre tento model

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} = \eta \dot{\varepsilon} \quad (3)$$

Pri skokovom zaťažení konštantným napätím σ_0 v čase $t = 0$ len pružný člen reaguje okamžite, takže $\varepsilon(0) = \sigma_0 / E$ a pretože $\dot{\sigma} = 0$ riešenie diferenciálnej rovnice (3) je

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t + C = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{E} = \left(\frac{t}{\eta} + \frac{1}{E} \right) \sigma_0 = D(t) \sigma_0 \quad (4)$$

kde $D(t)$ sa nazýva *modul krípovej poddajnosti*. Deformácia Maxwellovho modelu teda pri zaťažení konštantným napätím (čo je skúška materiálu na kríp) zo začiatočnej hodnoty σ_0 / E lineárne neobmedzene narastá, po ukončení zaťaženia poklesne o pružnú hodnotu a v závislosti od dĺžky časového intervalu zostáva v materiáli trvalá deformácia, pričom model vôbec nesimuluje nelineárnu *deformačnú* relaxáciu. Voľbou konštánt η a E možno takto len veľmi hrubým spôsobom aproximovať vlastnosti reálneho materiálu pri krípevom zaťažení (obr. 4).



Obr.4 Odozva Maxwellovho modelu na skokové zmeny zaťažovacieho napätia σ_0

Maxwellov model však je schopný dobre simulovať *napätovú* relaxáciu materiálu pri zaťažení konštantnou deformáciou (obr.1c). Ak model zaťažime konštantnou, na čase nezávislou deformáciou $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, v oboch členoch vznikne rovnaké napätie, takže platí

$$E \varepsilon_1 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

Úpravou a riešením tejto diferenciálnej rovnice dostaneme

$$E(\varepsilon_0 - \varepsilon_2) = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

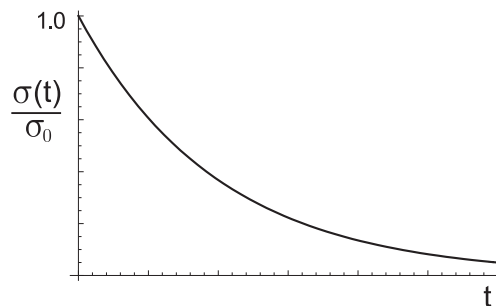
$$\frac{E}{\eta} dt = \frac{d\varepsilon_2}{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}$$

$$\frac{E}{\eta} t = -\ln(\varepsilon_0 - \varepsilon_2) + C$$

Zo začiatočnej podmienky $t = 0 \rightarrow \varepsilon_2 = 0$ dostaneme $C = \ln \varepsilon_0$ a pretože $\sigma = E(\varepsilon_0 - \varepsilon_2)$ pre napätovú relaxáciu Maxwellovho modelu dostávame

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 e^{-t/t_R} = \sigma_0 e^{-t/t_R}, \quad t_R = \frac{\eta}{E} \quad (5)$$

Typický priebeh relaxácie napätia je znázornený na obr.5. Parameter t_R sa nazýva relaxačný čas, je mierou rýchlosti relaxácie napätia, čím je menší, tým je relaxácia napätia rýchlejšia. Zo vzťahu (5) vidieť, že je to čas, za ktorý napätie klesne na hodnotu σ_0 / e .



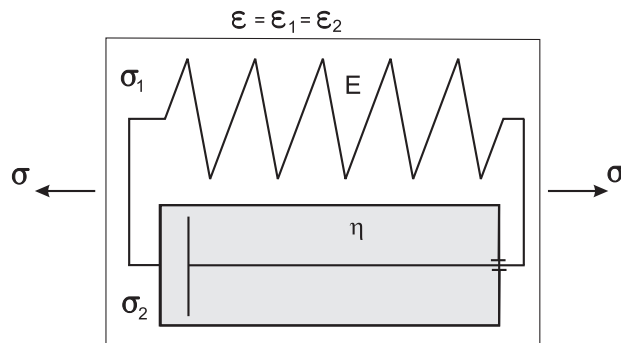
Obr.5 Maxwellov model - relaxácia napätia pri konštantnej deformácii

Pre porovnanie s Hookeovým zákonom možno rovnicu (5) zapísať v tvare

$$\sigma(t) = E e^{-t/t_R} \varepsilon_0 = E(t) \varepsilon_0 \quad (6)$$

kde $E(t)$ sa nazýva *relaxačný modul* materiálu, ktorý, tak isto ako model krípovej poddajnosti v (4), je pri viskoelastickom materiáli závislý od času a pri zložitejších modeloch zohráva dôležitú úlohu pri napasovaní jednoosovej krivky modelu na experimentálne zistenú krivku reálneho materiálu.

b) *Kelvinov (Voigtov) materiálový model* pozostáva z pružného člena s modulom pružnosti E a viskózného člena s viskozitou η , ktoré sú zapojené paralelne (obr. 6), takže platí



Obr.6 Kelvinov (Voigtov) materiálový model

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_2}{\eta}, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

Po vylúčení σ_1 a σ_2 z týchto rovníc konštitutívny vzťah je

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (7)$$

Separáciou premenných pri krípovom tečení účinkom konštantného napätia σ_0 zo (7) dostaneme

$$\frac{E}{\eta} dt = \frac{d\varepsilon}{(\sigma_0/E) - \varepsilon}$$

a po integrácii

$$\frac{E}{\eta} t = -\ln[(\sigma_0/E) - \varepsilon] + C$$

Zo začiatočnej podmienky $t = 0 \rightarrow \varepsilon = 0$ dostaneme $C = \ln(\sigma_0 / E)$, takže pre časovú zmenu deformácie (kríp materiálu) platí

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}(1 - e^{-t/t_R}) = \varepsilon_0(1 - e^{-t/t_R}), \quad t_R = \frac{\eta}{E} \quad (8)$$

Rovnica (8) ako aj obr. 7 potvrdzujú fyzikálnu úvahu, že pri skokovom zaťažení modelu konštantným napätím σ_0 v čase $t = 0$, pružný člen sa nemôže okamžite deformovať, pretože mu v tom bráni viskózný člen, takže krípvá krivka štartuje z hodnoty $\varepsilon = 0$ s rýchlosťou (smernicou dotyčnice) $\dot{\varepsilon}(t = 0) = \sigma_0 / \eta$. Parameter t_R sa v tomto prípade nazýva *retardačný* (spomaľovací) čas materiálu; čím je vyšší, tým je krípvá deformácia pomalejšia.

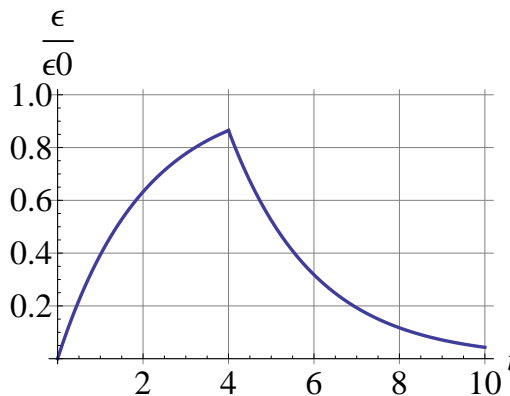
Ak model v čase $t = t_1$ odľahčíme, konštitutívna rovnica (7) s nulovým napätím sa zmení na $0 = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$ a jej riešenie je

$$\varepsilon(t) = Ce^{-(E/\eta)t} \quad (9)$$

Deformácia v čase t_1 podľa (8) je $\varepsilon(t_1) = (\sigma_0 / E)(1 - e^{-(E/\eta)/t_1})$ a keď ju využijeme v (9) ako začiatočnú podmienku, pre časový interval odľahčenia modelu dostaneme vzťah

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}(e^{\frac{E}{\eta}t_1} - 1)e^{-\frac{E}{\eta}t} = \varepsilon_0(e^{t_1/t_R} - 1)e^{-t/t_R} \quad t \geq t_1, \quad t_R = \frac{\eta}{E} \quad (10)$$

Graficky je typický priebeh krípvého zaťaženie a nelineárneho odľahčenie (deformačnej regenerácie) podľa vzťahov (8) a (10) znázornený na obr.7 s hodnotami $\varepsilon_0 = \sigma_0 / E = 1$, $t_R = 2$, $t_1 = 4$.



Obr.7 Ukážka priebehu krípvého tečenia a nelineárneho uvoľnenia pri Kelvinovom (Voigtovom) modeli

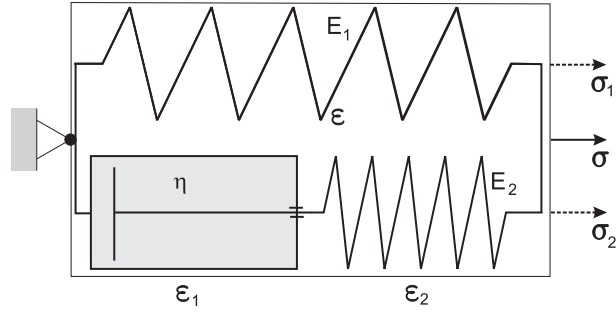
Nedostatkom Kelvinovho (Voigtovho) modelu je však to, že nie je schopný simulovať nelineárnu napäťovú relaxáciu viskózneho materiálu. Ak do konštitutívneho vzťahu (7) dosadíme konštantnú deformáciu ε_0 , dostaneme konštantné napätie $\sigma = E\varepsilon_0$ a k žiadnej časovo závislej napäťovej relaxácii nedochádza.

c) Maxwellov model paralelne spojený s pružným členom

Maxwellov a Kelvin-Voigtov model sú najjednoduchšie modely viskoelastického materiálu. Kombináciu pružného a viskózneho člena možno tvoriť ďalšie modely, ktoré lepšie vystihujú napäťovo-deformačné vlastnosti reálneho materiálu pri jednoosovom zaťažovaní. Jednoduchou ukážkou je model znázornený na obr. 8, kde je Maxwellov model paralelne spojený s pružným členom.

Z fyzikálnych úvah vyplývajú pre model (so značením veličín podľa obr.8) tieto východzie vzťahy

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \sigma_1 = E_1\varepsilon, \quad \sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}_1 = E_2\varepsilon_2 \quad (11)$$



Obr.8 Maxwellov model paralelne spojený s pružným členom

Derivovaním (11)₁ podľa času a využitím (11)₄ dostávame

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma_2}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}_2}{E_2} \quad (12)$$

Pomocou (11)₂ a (11)₃ vylúčime z (12) σ_2

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma - E_1 \varepsilon}{\eta} + \frac{1}{E_2} (\dot{\sigma} - E_1 \dot{\varepsilon}) \quad (13)$$

a po usporiadaní členov dostávame hľadanú konštitutívnu rovnicu modelu

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma} = E_1 \varepsilon + \eta \frac{E_1 + E_2}{E_2} \dot{\varepsilon} \quad (14)$$

Ak do (14) dosadíme $E_1 = 0$, čím vyradíme horný pružný člen v obr. 8, dostaneme konštitutívnu rovnicu Maxwellovho modelu (3), alebo ak bude dolný pružný člen dokonale tuhý ($E_2 = \infty$), dostaneme vzťah platný pre Kelvin/Voigtov model (7).

Pre krípový test so zaťažením σ_0 zo (14) dostávame

$$\sigma_0 = E_1 \varepsilon(t) + K \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad K = \eta \frac{E_1 + E_2}{E_2}$$

a riešenie tejto diferenciálnej rovnice po využití fyzikálne zrejmej začiatočnej podmienky $\varepsilon(0) = \sigma_0 / (E_1 + E_2)$ je

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - \frac{E_2}{E_1(E_1 + E_2)} e^{-\frac{E_1}{K}t} \right) \quad (15)$$

Ak model v čase $t = t_1$ odľahčíme, konštitutívna rovnica (14) s nulovým napätím sa zmení na $0 = E_1 \varepsilon + K \dot{\varepsilon}$ a jej riešenie je

$$\varepsilon(t) = C e^{-(E_1/K)t} \quad (16)$$

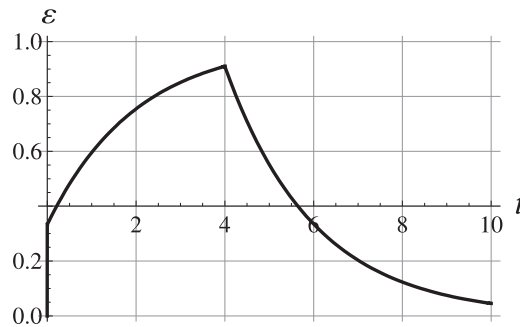
Deformácia v čase t_1 podľa (15) je

$$\varepsilon(t_1) = \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - \frac{E_2}{E_1(E_1 + E_2)} e^{-\frac{E_1}{K}t_1} \right)$$

a keď ju využijeme v (16) ako začiatočnú podmienku, pre časový interval odľahčenia modelu dostaneme vzťah

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} \left[e^{(E_1/K)t_1} - \frac{E_2}{E_1(E_1 + E_2)} \right] e^{-(E_1/K)t} \quad t \geq t_1, \quad K = \eta \frac{E_1 + E_2}{E_2} \quad (17)$$

Graficky je typický priebeh kríповého zaťaženia a nelineárneho odľahčenia (deformačnej regenerácie) podľa vzťahov (15) a (17) znázornený na obr.9 s hodnotami $\sigma_0 = 1$, $E_1 = 1$, $E_2 = 2$, $E_1/K = 1/2$, $t_1 = 4$.



Obr.9 Ukážka priebehu kríповého tečenia a nelineárneho uvoľnenia trojčlenného modelu

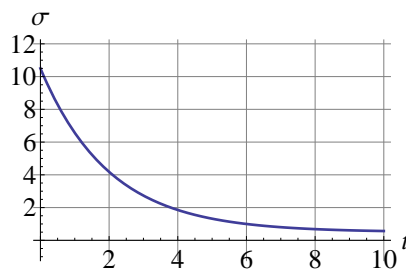
Z obr. 9 vidieť, že model pri zaťažení konštantným napätím σ_0 nadobudne okamžitú deformáciu $\varepsilon_0 = \sigma_0 / (E_1 + E_2)$, ktorá v závislosti od času a parametrov modelu potom nelineárne narastá. Pri odľahčení ($t_1 = 4, \sigma_0 = 0$) zaznamenáme nelineárny pokles deformácie. Tieto žiaduce vlastnosti model prevzal v podstate od Kelvin-Voigtovho modelu. Schopnosť napätvej relaxácie zase prevzal od Maxwellovho modelu. Ak model zaťažíme konštantnou deformáciou ε_0 , konštitutívna rovnica (14) sa zmení na

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma} = E_1 \varepsilon_0$$

Jej riešenie so začiatočnou podmienkou $\sigma(0) = \varepsilon_0(E_1 + E_2)$ je

$$\sigma(t) = \varepsilon_0(E_1 + E_2) e^{-\frac{E_2 t}{\eta}} \quad (18)$$

Tento vzťah pre hodnoty $E_1 = 5$, $E_2 = 20$, $\eta = 50$ a $\varepsilon_0 = 0,1$ dáva priebeh napätia znázornený na obr. 10.

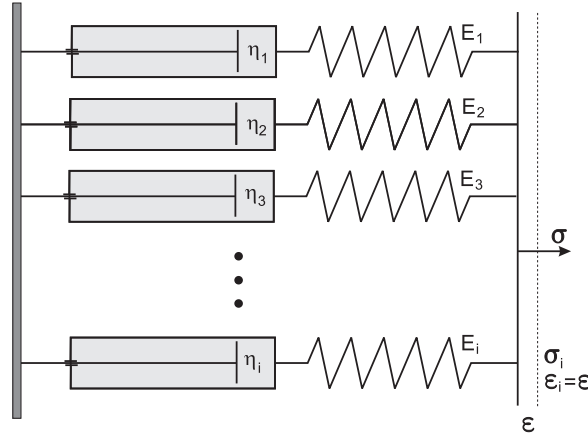


Obr.10 Ilustračný obrázok relaxácie napätia modelu

Kombináciou viacerých Maxwellových alebo Kelvin-Voigtových modelov možno tvoriť modely, ktoré sú schopné dostatočne presne simulovať aj zložité experimentálne určené jednoosé vlastnosti reálneho viskoelastického materiálu. Pridaním každého ďalšieho člena sa zvyšujú simulačné možnosti modelu, ale zároveň sa aj zvyšuje rád jeho diferenciálnej konštitutívnej rovnice a množstvo koeficientov, ktoré treba určiť pri identifikácii modelu s experimentálne získanými výsledkami kríповého a relaxačného testu materiálu. Všeobecná konštitutívna rovnica modelu zloženého z ľubovoľného počtu členov má tvar

$$a_0 \sigma + a_1 \dot{\sigma} + a_2 \ddot{\sigma} + \dots = b_0 \varepsilon + b_1 \dot{\varepsilon} + \dots \quad (19)$$

Významnú úlohu vo výpočtových postupoch MKP zohráva teória *zovšeobecneného Maxwellovho modelu* v zapojení, kedy jeho členy sú pospájané paralelne (obr. 11), ktorý preto budeme analyzovať trochu podrobnejšie.



Obr.11 Zovšeobecnený Maxwellov model s paralelným spojením členov

Konštitutívna rovnica jednočlenného Maxwellovho modelu zapísaná podľa (3) je $a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} = b_1\dot{\epsilon}$, dvojčlenného s paralelným spojením členov $a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} = b_1\dot{\epsilon} + b_2\ddot{\epsilon}$ atď. Po určení koeficientov dvojčlenného modelu (napr. z podobných fyzikálnych úvah ako pre model na obr. 8) a zovšeobením tohto postupu možno dostať vzťah pre určenie konštitutívnej rovnice zovšeobecného Maxwellovho modelu v tvare

$$\begin{aligned} & [(D/E_1 + 1/\eta_1)(D/E_2 + 1/\eta_2)(D/E_3 + 1/\eta_3)\cdots]\sigma \\ & = [D(D/E_2 + 1/\eta_2)(D/E_3 + 1/\eta_3)\cdots + D(D/E_1 + 1/\eta_1)(D/E_3 + 1/\eta_3)\cdots + \cdots]\epsilon \end{aligned} \quad (20)$$

kde D reprezentuje príkaz na deriváciu premennej, ktorá s ním príde do súčiny, podľa času ($D\bullet = d\bullet/dt = \dot{\bullet}$). Pre dvojčlenný model podľa (20) dostaneme

$$\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} = b_1\dot{\epsilon} + b_2\ddot{\epsilon} \quad (21)$$

kde $a_1 = \frac{E_1\eta_2 + E_2\eta_1}{E_1E_2}$, $a_2 = \frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}$, $b_1 = \eta_1 + \eta_2$, $b_2 = \frac{E_1 + E_2}{E_1E_2}\eta_1\eta_2$.

Ak pre tento model zadáme deformáciu, rovnica (21) sa zmení na lineárnu homogénnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami

$$\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} = 0 \quad (22)$$

Jej charakteristická rovnica je $a_2r^2 + a_1r + 1 = 0$, ktorá má dva reálne korene $\eta_1/E_1 = t_1$ a $\eta_2/E_2 = t_2$ a všeobecné riešenie (22) teda je

$$\sigma(t) = C_1e^{-t/t_1} + C_2e^{-t/t_2} \quad (23)$$

Po využití začiatočných podmienok $\sigma(0) = \epsilon_0(E_1 + E_2)$ a $\dot{\sigma}(0^+) = -(E_1^2/\eta_1 + E_2^2/\eta_2)\epsilon_0$ sa (23) zmení na výsledný tvar

$$\sigma(t) = \epsilon_0(E_1e^{-t/t_1} + E_2e^{-t/t_2}) \quad (24)$$

Poznávame, že podmienka pre $\sigma(0)$ je zrejماً z fyzikálnej úvahy a podmienka pre $\dot{\sigma}(0)$ vyplynie z rovnice, ktorú dostaneme, keď konštitutívnu rovnicu (21) zintegrujeme v čase $t = 0$ v časových hraniciach od $-\Delta\tau$ po $+\Delta\tau$, ktoré sa v limite blížia k nule. Dostaneme tak pre určenie začiatočnej rýchlosti relaxácie napätia rovnicu

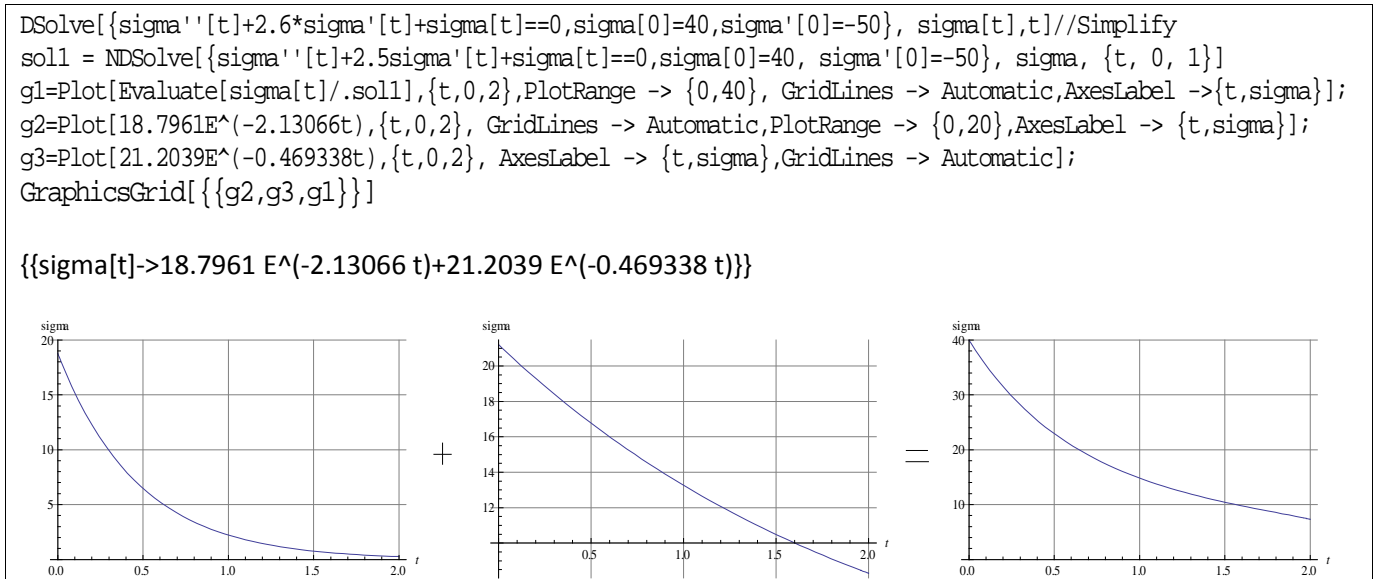
$$\frac{E_1\eta_2 + E_2\eta_1}{E_1E_2}(E_1 + E_2)\epsilon_0 + \frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}\dot{\sigma}(0^+) = (\eta_1 + \eta_2)\epsilon_0 \rightarrow \dot{\sigma}(0^+) = -(E_1^2/\eta_1 + E_2^2/\eta_2)\epsilon_0$$

Pre model s hodnotami $a_1 = 2.5$ a $a_2 = 1$, sme urobili ilustračný test relaxácie napätia z hodnoty $\sigma(0) = 40$ (ktorú v čase nula dosiahneme náhlou konštantnou deformáciou $\epsilon_0 = 1$) so začiatočnou rýchlosťou

poklesu napätia $\dot{\sigma}(0) = -50$. Diferenciálna rovnica (21) má teraz tvar $\sigma + 2.5\dot{\sigma} + \ddot{\sigma} = 0$ a jej riešenie s uvedenými začiatočnými podmienkami je (obr.12)

$$\sigma(t) = 18,8 e^{-2,13t} + 21,2 e^{-0,47t} = C_1 e^{-t/t_1} + C_2 e^{-t/t_2} \quad (25)$$

s grafickým priebehom na obr.12. Obrázok je vykreslený tak, aby ukázal superpozíciu výsledného priebehu napätia z oboch členov funkcie (25).



Obr.12 Napätiová relaxácia dvojčlenného zovšeobecneného Maxwellovho modelu

Záujemca môže zopakovať uvedený postup aj pre odvodenie $\varepsilon(t)$ pre prípad krípového tečenia s konštantným napätím σ_0 a zistí, že viacčlenný zovšeobecnený Maxwellov model, na rozdiel od jednočlenného, je už schopný v takomto prípade simulovať nelineárny priebeh deformácie.

Keď vzťah (24) zovšeobecníme pre n členov

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/t_i}, \quad t_i = \frac{\eta_i}{E_i} \quad (26)$$

vidíme, že výsledné napätie predstavuje superpozíciu napätí jednotlivých členov, ktoré majú rozdielne, od času závislé, viskoelastické vlastnosti. Po doplnení modelu o sériovo pripojený pružný člena s konštantnou tuhosťou E_0 dosiahneme to, že časový priebeh napätia nebude konvergovať k nule, ale k hodnote $\sigma_0 = E_0 \varepsilon_0$

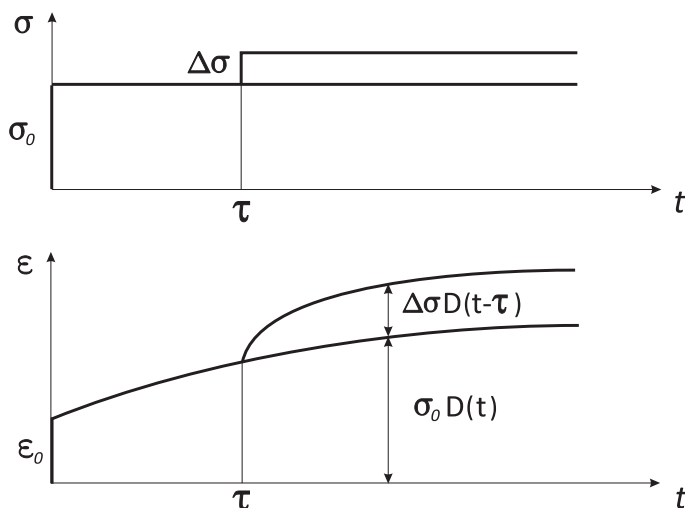
$$\sigma(t) = \left(E_0 + \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/t_i} \right) \varepsilon_0 = E(t) \varepsilon_0, \quad t_i = \frac{\eta_i}{E_i} \quad (27)$$

kde $E(t)$ je relaxačný modul. Poznamenávame však, že pri zaťažení časovo premenlivou deformáciou je relaxačný modul funkciou aj deformácie, t.j. $E \equiv E(\varepsilon, t)$.

Jednorozmerný model zaťažený časovo premenlivým zaťažením

Uvažujme lineárny jednorozmerný viskoelastický model zaťažený časovo premenlivým napätím $\sigma(t)$ a určme vzťah pre výpočet jednorozmernej deformácie $\varepsilon(t)$, keď poznáme modul krípovej poddajnosti $D(t)$. Z predchádzajúcich rozborov vieme, že od zaťaženia konštantným napätím σ_0 dostaneme priebeh deformácie $\varepsilon(t) = D(t) \sigma_0$ - pozri napr. (4). Pretože materiál je lineárny a platí zákon superpozície môžeme k tejto deformácii pripočítať deformáciu od malého prírastku napätia $\Delta\sigma$, ktoré začne pôsobiť v čase τ . Pre výslednú deformáciu potom platí (obr.13)

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t) + \Delta\sigma D(t - \tau)$$



Obr.13 Superpozícia prírastkov deformácie pri zmene napätia

Sumáciu prírastkov deformácie možno zovšeobecniť pre nekonečne veľký počet nekonečne malých prírastkov napätia $d\sigma_i$ a dostaneme vzťah pre určenie kríповého tečenia

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t) + \sum_{i=1}^{\infty} d\sigma_i D(t - \tau_i) = \sigma_0 D(t) + \int_0^t D(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (28)$$

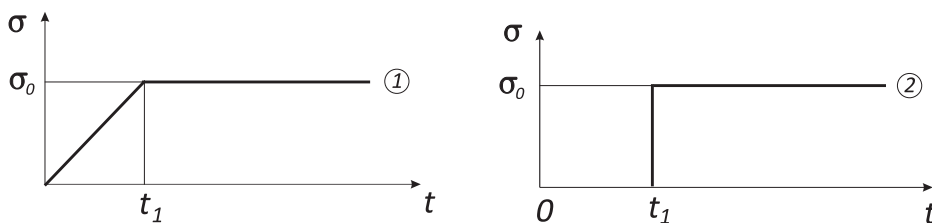
Výsledný integrál sa nazýva Boltzmannov, ale možno sa stretnúť aj s inými názvami: hereditárny, klesajúcej pamäti, Duhamelov. Analogicky možno dospieť aj ku vzťahu pre relaxáciu napätia v ktorom kríповú poddajnosť D nahradí relaxačný modul E

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E(t) + \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (29)$$

Vzťahy (28) a (29) sú konštitutívne rovnice viskoelastického materiálu vo všeobecnom tvare, platia, samozrejme, aj pre jednoduché mechanické modely, pre reálny materiál však musíme do nich určiť moduly D a E na základe experimentálnych testov. Napr. podľa (29) napätiová odozva na náhle zaťaženie materiálu deformáciou ε_0 je $\varepsilon_0 E(t)$, z čoho vyplýva návrh na experimentálne určovanie $E(t)$ na základe priebehu nameraného napätia. Analogicky podľa (28) možno určiť $D(t)$ meraním časového priebehu deformácie vyvolanej náhlým napätiovým zaťažením σ_0 .

Príklad 1

Vyšetrite pomocou Boltzmannovho integrálu priebeh deformácie Maxwellovho modelu pri dvoch zaťaženiach s rovnakým maximálnym napätím σ_0 , ale rozdielnym časovým priebehom podľa obr. 14. Konštitutívna rovnica Maxwellovho modelu je (3) $\sigma + \eta \dot{\sigma} / E = \eta \dot{\varepsilon}$ a modul kríповej poddajnosti (4) $D(t) = t / \eta + 1 / E$.



Obr. 14

Riešenie

1. zaťaženie

1. časový úsek $0 < t \leq t_1$: $\sigma(0) = 0$, $\sigma(t) = \sigma_0 t / t_1$, $d\sigma(\tau) / d\tau = \sigma_0 / t_1$

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t) + \int_0^t D(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau = 0 + \frac{\sigma_0}{t_1} \int_0^t \left(\frac{t-\tau}{\eta} + \frac{1}{E} \right) d\tau = \frac{\sigma_0}{t_1} \left(\frac{t^2}{2\eta} + \frac{t}{E} \right)$$

2. časový úsek: $t \geq t_1$: $\sigma(t) = \sigma_0$, $d\sigma(\tau)/d\tau = 0$

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t) + \int_0^{t_1} D(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau + \int_{t_1}^t D(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_{t_1}^t D(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{\sigma_0}{t_1} \left(\frac{t-t_1}{2\eta} + \frac{1}{E} \right)$$

2. zaťaženie: $t \geq t_1$

Použijeme vzťah (4) a pre začiatok zaťaženia čas posunutý o t_1

$$\varepsilon(t) = D(t-t_1)\sigma_0(t_1) = \sigma_0 \left(\frac{t-t_1}{\eta} + \frac{1}{E} \right)$$

čo dáva menšie hodnoty ako prvé zaťaženie v tom istom časovom úseku.

Uvedený príklad ilustruje dve vlastnosti Boltzmannovej integrálnej superpozície, ktoré obidve súhlasia s experimentálnymi skúsenosťami: Po prvé, materiálový model má "pamäť"; pamätá si predchádzajúcu zaťažovaciu históriu, na rozdielne zaťažovacie histórie reaguje rozdielne. Po druhé, reaguje na rýchlosť zaťažovania; deformácia je väčšia pri postupne rastúcom zaťažení na konečnú hodnotu, ako pri náhlom zaťažení na túto hodnotu.

Viacrozmerná viskoelasticita

Riešenie rovinných a priestorových viskoelastických úloh s malými deformáciami a izotropnými vlastnosťami materiálu je v podstate založené na zovšeobecnení poznatkov a postupov použitých pri jednorozmerných úlohách. Tuhostné vlastnosti materiálu (a potom aj tenzor napätia) sa s ohľadom na výhodnejšie vyjadrenie a jednoduchšie numerické riešenie priestorovej nestacionárnej nelineárnej úlohy rozdeľujú na objemové a deviatorické (analogický postup sa využíval pri pružne plastickej úlohe v D12). Deviatorické (šmykové) deformačné vlastnosti materiálu charakterizuje modul pružnosti v šmyku G a objemový stlačiteľnosť objemový modul K . Vzťahy medzi materiálovými charakteristikami sú známe zo základov pružnosti

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

kde E je modul pružnosti v ťahu a μ je Pissonovo číslo materiálu. Materiálové vlastnosti mnohých viskoelastických materiálov pri zaťažení nie sú stále, menia sa s časom; pri určitej konštantnej teplote sú to klesajúce funkcie vyjadrované obyčajne vo forme Pronyho radov tak, ako sme sa s tým už stretli pri zovšeobecnenom Maxwellovom modeli

$$G(t) = G_0^\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{-\frac{t}{t_i^G}} \quad (30)$$

$$K(t) = K_0^\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{-\frac{t}{t_i^K}} \quad (31)$$

kde G_i a K_i sú rozdielne moduly jednotlivých Maxwellových členov, pričom $t_i^G = \eta_i / G_i$ a $t_i^K = \eta_i / K_i$ sú ich relaxačné časy. Pri členoch G_0 a K_0 sa často môžeme stretnúť s indexom ∞ , ktorý naznačuje, že ide o hodnotu, ku ktorej rad konverguje pri veľmi dlhom (teoreticky nekonečnom) čase.

Funkcie (30) a (31) je výhodné, kvôli ich ľahšej modifikácii, upraviť zavedením relatívnych členov

$$\alpha_0^G = G_0^\infty / G_0, \quad \alpha_i^G = G_i / G_0$$

$$\alpha_0^K = K_0^\infty / K_0, \quad \alpha_i^K = K_i / K_0$$

kde

$$G_0 = G_0^\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i, \quad K_0 = K_0^\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i$$

Funkcie (30) a (31) majú potom tvar

$$G(t) = G_0 \left[\alpha_0^G + \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i^G e^{-\frac{t}{t_i^G}} \right] \quad (32)$$

$$K(t) = K_0 \left[\alpha_0^K + \sum_{i=1}^{n_K} \alpha_i^K e^{-\frac{t}{t_i^K}} \right] \quad (33)$$

Konštitutívnu rovnicu pre priestorovú napätosť teraz už možno napísať vo forme zovšeobecnenia Boltzmannovho integrálu s rozdelením napätia na deviatorickú a objemovú časť

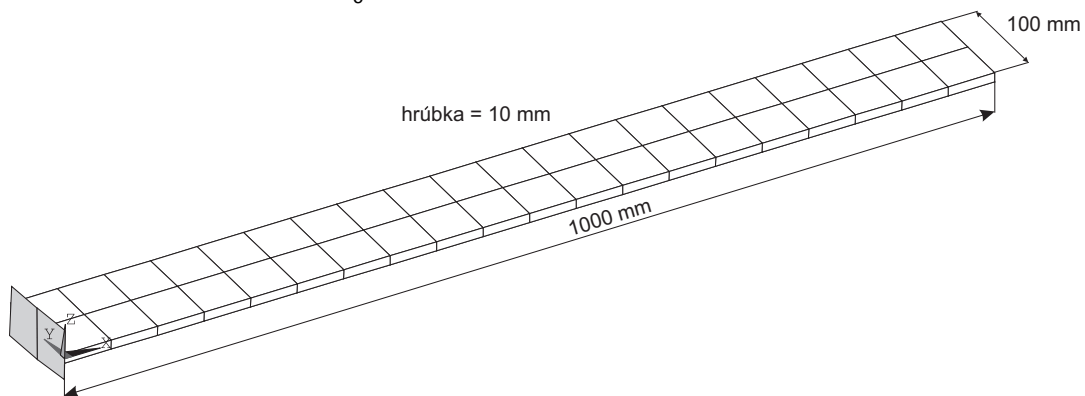
$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t 2G(t-\tau) \frac{d\mathbf{e}(\tau)}{d\tau} d\tau + \mathbf{I} \int_0^t K(t-\tau) \frac{d\varepsilon_V(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (34)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor Cauchyho napätia, \mathbf{e} je deviatorická časť tenzora deformácie, ε_V je objemová časť deformácie a \mathbf{I} je jednotkový tenzor. V programoch MKP sa zložky napätia (34) v integračných bodoch vyčíslujú v časových krokoch pomocou numerickej integrácie (pozri napr. teoretický manuál programu ANSYS).

Príklad 2

Pre podlhovastú obdĺžnikovú dosku, ktorej výpočtový model a rozmery sú znázornené na obrázku, určte pomocou programu ANSYS časový priebeh maximálneho ohybového napätia, keď ju na kratšej strane votkneme a na náprotivnej strane naplocho prehneme o 30 mm. Poissonovo číslo materiálu $\mu = 0,3$ a objemový modul K nie sú časovo závislé. Vyhodnotením experimentálneho testu materiálu sa zistili hodnoty časového priebehu modulu pevnosti v šmyku s približnou aproximáciou podľa (30), kde platí

$$\begin{aligned} G_1 &= 7300 \text{ MPa} & t_1 &= 100 \text{ s} \\ G_2 &= 4900 \text{ MPa} & t_2 &= 2000 \text{ s} \\ G_3 &= 480 \text{ MPa} & t_3 &= 2 \cdot 10^4 \text{ s} \\ G_0^\infty &= 0 \end{aligned}$$



Riešenie

Pre program ANSYS treba hodnoty Pronyho radu pre šmykový modul prepočítať podľa horeuvedených vzťahov na relatívne hodnoty. Začiatkový modul pružnosti v šmyku (hodnota pri $t = 0$) je

$$G_0 = G_0^\infty + \sum_{i=1}^3 G_i = 12680 \text{ MPa}$$

a relatívne násobky sú

$$\alpha_i = G_i / G_0 \rightarrow \alpha_1 = 0,61985$$

$$\alpha_2 = 0,38446$$

$$\alpha_3 = 0,03766$$

Začiatočný modul pružnosti v ťahu je

$$E_0 = 2G_0(1 + \mu) = 32968 \text{ MPa}$$

a objemový modul

$$K = \frac{E_0}{3(1 - 2\mu)} = 27473 \text{ MPa}$$

Úlohu sme v interaktívnom móde programu zadali a vypočítali týmto postupom:

1. Zadanie názvu úlohy

Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = OhybViskoDosky, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu

Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Shell Elastic 4node 181, OK, Close;

3. Hrúbka dosky

Main Menu>Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... ,OK, TK(I)=10, OK, Close;

4. Materiálové údaje

Lineárne

Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 32968, PRXY = 0.3, OK,

Nelineárne

*Nonlinear, Viscoelastic, Prony, Shear Response... a1=0.61985, t1=100, Add Row,
a2=0.38446, t2=2000, Add Row,
a3=0.03766, t3=2E4, OK,*

Volumetric Response...

a1=27473, t1=0, OK, Material, Exit;

5. Vytvorenie bodov plochy prvkov (číslovanie bodov je automatické)

*Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS: X = 0, Y = 0, Apply,
X = 1000, Y = 0, Apply,
X = 1000, Y = 100, Apply,
X = 0, Y = 100, OK;*

6. Vytvorenie plochy prvkov

Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Arbitrary>Trough KPs: ↑KP1,↑KP2,↑KP3,↑KP4, OK;

7. Vytvorenie prvkov

*Preprocessor>Meshing>Mesh Tool: Size Controls: Areas, Set: Pick All, SIZE = 50, OK;
(Preprocessor>Meshing>Mesh Tool): Mesh, Pick All, Close;*

8. Upevnenie a zaťaženie modelu

*Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes ↑,
P: Tri uzly na ľavej strane obdĺžnika, OK, All DOF, Value = 0, Apply,
P: Tri uzly na pravej strane obdĺžnika, OK, UZ, Value = -30, OK;*

9. Riadiace príkazy nelineárneho riešenia a výpočet

Solution>

P:Unabridged Menu

Load Step Opts>Time/Frequenc>Time and Substps..., TIME=3600, NSUBST=100, KBC=Stepped,OK;

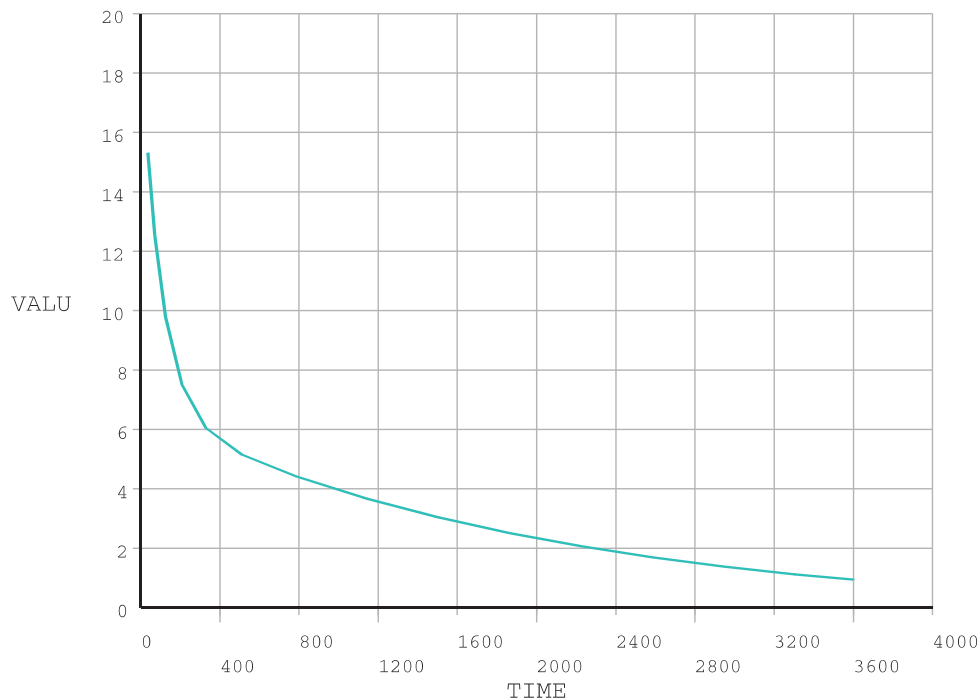
Load Step Opts>Output Ctrls>DB/Results File..., FREQ=Every Substep, OK;

Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

10. Vykreslenie relaxácie maximálneho ohybového napätia (v krajnom bode votknutého prierezu)

Utility Menu>Plot>Elements

TimeHist Postpro>Kliknite prvú ikonku zľava (Add Data) >Nodal Solution>Stress>X-Component of stress,OK,
Piknite uzol vo votknutí, OK, Piknite tretiu ikonku zľava (Graph Data)



11. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy

Ansyes Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;

Dosku, vzhľadom na jej tvar, možno považovať za nosník a začiatkové maximálne napätie (v čase $t = 0$) možno približne skontrolovať pomocou vzorcov platných pre ohyb nosníka. Sila, ktorá vyvolá priehyb 30 mm potom je

$$F = \frac{3EI}{\ell^3} w_{\max} = \frac{3 \cdot 32968 \cdot 100 \cdot 10^3}{12 \cdot 1000^3} 30 = 24,73 \text{ N}$$

a pre maximálne ohybové napätie platí

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_o} = \frac{F\ell}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{6 \cdot 24,73 \cdot 1000}{100 \cdot 10^2} = 14,84 \text{ MPa}$$

Vplyv teploty

Vlastnosti mnohých viskoelastických materiálov, napr. polymérov, sú silno závislé od teploty a teória ich materiálových modelov a konštitutívnych rovníc nemôže túto veličinu obísť. Aj v tomto prípade základné postupy treba hľadať najprv pri jednorozmerných modeloch. Ak budeme napr. uvažovať konštitutívnu rovnicu Maxwellovho modelu (3) s teplotne závislou viskozitou $\eta(T)$, dostaneme diferenciálnu rovnicu s dvomi nezávislými premennými - časom t a teplotou T

$$\sigma + \frac{\eta(T)}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \eta(T) \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (35)$$

Ak do nej zavedieme teplotu ako funkciu času $T = T(t)$, vznikne lineárna diferenciálna rovnica s nekonštantnými koeficientami. Zjednodušíme tento problém najprv tak, že budeme uvažovať konštantnú teplotu $T = T_i$. Pri danej teplote T_i potom pre kríповú podajnosť a relaxčný modul Maxwellovho modelu podľa (4) a (5) platí

$$D(t, T_i) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta_i} \quad (36)$$

$$E(t, T_i) = E e^{-t/t_R(T_i)}, \quad t_R(T_i) = \frac{\eta(T_i)}{E} \quad (37)$$

a model má takto pre každú teplotu T_i inú kríповú a relaxačnú funkciu.

Nahradíme teraz čas t premennou

$$\xi = A \frac{t}{\eta(T)} \rightarrow \frac{d\xi}{dt} = \frac{A}{\eta(T)} \quad (38)$$

kde A je konštanta. Táto substitúcia transformuje konštitutívnu rovnicu Maxwellovho modelu (35) na diferenciálnu rovnicu s jedinou nezávislou premennou ξ

$$\sigma(\xi) + \frac{A}{E} \frac{d\sigma}{d\xi} = A \frac{d\varepsilon}{d\xi} \quad (39)$$

a kríповá poddajnosť a relaxačný modul sa zjednodušia na

$$D(\xi) = \frac{1}{E} + \frac{\xi}{A} \quad (40)$$

$$E(\xi) = E e^{-\xi/t_R(T_i)}, \quad t_R = \frac{A}{E} \quad (41)$$

Grafické obrazy týchto funkcií predstavujú tzv. *hlavné krivky* (master curves), z ktorých možno spätnou transformáciou dostať krivky funkcií (36) a (37) pre všetky rozdielne teploty T_i a naopak, všetky tieto krivky v systéme s premennou ξ spätne skolabujú (premiestnia sa) do hlavných kriviek.

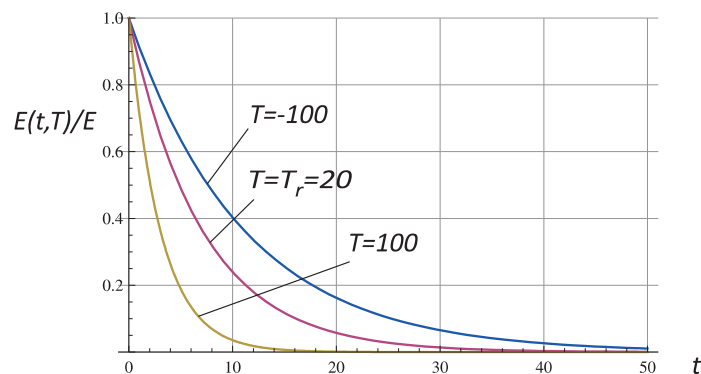
Zvoľme ako príklad lineárnu zmenu viskozity v závislosti od teploty podľa vzťahu

$$\eta(T_i) = \eta_0 \left[1 - A \left(\frac{T_i}{T_r} - 1 \right) \right]$$

kde T_r je referenčná teplota (je to teplota, pri ktorej sa viskozita rovná zadanej konštantnej hodnote η_0) a $A = 0,2$ a zvolíme pomer $\eta_0 / E = 5$. Potom vzťah (41) vyjadrený pomocou t možno vyjadriť ako

$$E(t)/E = e^{-\frac{tE}{t_R \eta(T_i)}} = e^{-\frac{0,2t}{1,2-0,2(T_i/T_r)}}$$

Na obr.15 sme graficky znázornili časový priebeh týchto funkcií pre teploty 100, 20 a -100 °C. Sú to všetko exponenciálne funkcie s podobným tvarom a ak za referenčnú hodnotu zvolíme 20 °C, potom pri vyššej teplote



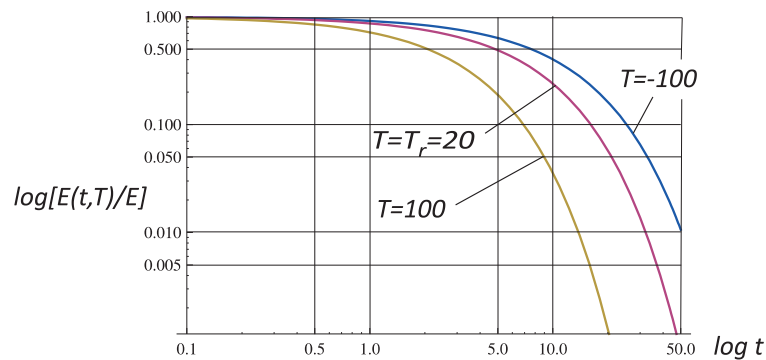
Obr.15 Priebeh relaxačného modulu pri rozdielnych teplotách

sa relaxačné časy znižujú a pri nižšej naopak. Ak tieto krivky znázorníme v logaritmickej súradnicovej sústave (obr. 16), krivky sú len posunuté voči sebe o určitú hodnotu. Tento fakt možno napr. pre časovo závislý modul pružnosti v šmyku vyjadriť takto

$$\log[G(t,T)] = f \left\{ \log(t) + \log[A(T, T_{ref})] \right\}$$

kde f označuje funkciu hlavnej krivky a $\log A(T, T_{ref})$ je funkcia horizontálneho posunu v čase t z teploty T_{ref} do teploty T . Z uvedeného vyplýva, že pre viskoelastické materiály, u ktorých experimenty potvrdzujú takúto podobnosť materiálových kriviek (sú to tzv. *termoreologicky jednoduché materiály*), je možné pomocou

hlavných kriviek určovať teplotné zmeny materiálových hodnôt z tzv. *posuvných funkcií* (shift functions) $A(T, T_{ref})$.



Obr.15 Priebeh relaxačného modulu pri rozdielnych teplotách v logaritmickej súradniciach

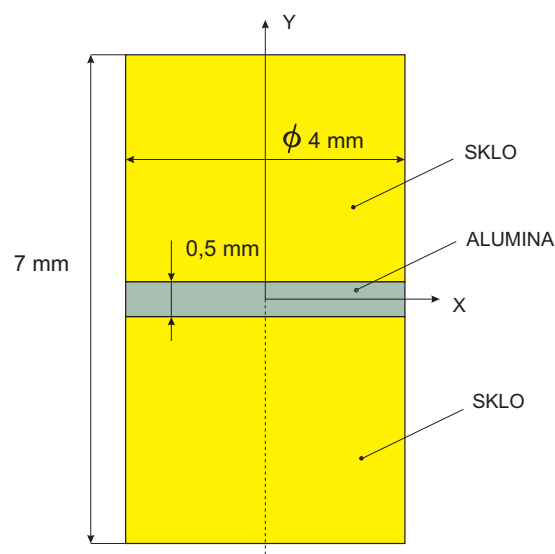
Hlavná krivka reálneho materiálu sa tvorí pomocou viacerých experimentálnych testov pri rôznych teplotách a posúvaním týchto kriviek na *referenčnú teplotu* T_{ref} sa zároveň určia aj hodnoty posuvnej funkcie $A(T_i, T_{ref})$. Interpoláciou týchto hodnôt možno zostaviť funkciu $A(T, T_{ref})$. Napr. pre polyméry možno namerané hodnoty posuvných funkcií dobre aproximovať tzv. WLF (Williams-Landel-Ferry) funkciou

$$\log A(T, T_{ref}) = \frac{C_1(T - T_{ref})}{C_2 + T - T_{ref}}$$

kde C_1 a C_2 sú materiálové konštanty. Okrem tejto funkcie sa využíva aj Tool-Narayanawamyho funkcia alebo, najmä pre roztavené sklo, Tool-Narayanawamyho funkcia s fiktívnou teplotou (pozri napr. teoretický manuál programu ANSYS).

Príklad 3

Rotačne symetrický sklenený izolátor plátovaný z oboch strán ku krúžku z ALUMINA (Al_2O_3) s rozmermi na obrázku sa ochladzuje rýchlosťou $3\text{ }^\circ\text{C}/\text{min}$. z teploty $618\text{ }^\circ\text{C}$ na teplotu $460\text{ }^\circ\text{C}$, kde sa izotermicky pozdrží 4 hodiny. Potom sa rýchlosťou $3\text{ }^\circ\text{C}/\text{min}$. ďalej ochladzuje na teplotu okolia $18\text{ }^\circ\text{C}$. Určte pomocou programu ANSYS priebeh maximálnej intenzity napätia (redukovaného napätia podľa Trescovej hypotézy) v závislosti na klesajúcej teplote na hranici oboch materiálov. Vlastnosti oboch materiálov prevezmite z príkladu VM200 overovacieho manuálu programu ANSYS (pozri tiež príkazové riadky príkladu uvedené nižšie). V príklade využite Tool-Narayanawamyho funkciu s fiktívnou teplotou.



Riešenie

Príklad sa riešil pomocou týchto príkazových riadkov programu ANSYS:


```

/PREP7
ET,1,PLANE183,,,1      ! OSOVO SYMETRICKÝ 8-UZLOVÝ PRVOK

/COM, MATERIALOVÉ VLASTNOSTI ALUMINA
MP,EX, 1, 3.73113E5
MP,PRXY,1, 0.3
TB,PRONY,1,1,1,SHEAR
TB,SHIFT,1,1,1,FICT
TBDATA,1,0.0,1E-7
TBDATA, 1, 618, 0.0, 1.0      ! PARAMETRE SHIFT FUNKCIE
TBDATA, 4, 618, 1.0, 0.0      ! PARAM. FIKT. TEPLoty: TFI, CFI, TAUF
TBDATA, 7,52.6E-7, 0.119E-7, -1.0E-11 ! KOEF. TEPL. ROZŤAŽNOSTI TUH. FÁZY
TBDATA,12,52.6E-7, 0.119E-7, -1.0E-11 ! KOEF. TEPL. ROZŤAŽNOSTI TEK. FÁZY

/COM, MATERIALOVE VLASTNOSTI SKLA
MP,EX, 2, 7.2548E4
MP,PRXY,2, 0.3
TB,PRONY,2,1,3,SHEAR      ! ŠMYKOVÉ VISKOELASTICKÉ VLASTNOSTI
TBDATA,1,0.422,0.0689
TBDATA,3,0.423,0.0065
TBDATA,5,0.155,0.0001
TB,SHIFT,2,1,6,FICT      ! TN SHIFT S FIKTÍVNOU TEPLotOU
TBDATA, 1, 618, 6.45E4, 0.53 ! PARAMETRE: FIKT. TEPLota, H/R, X
TBDATA, 4, 618, 0.108, 3.0   ! 1.FIKT.TEPLota
TBDATA, 7, 618, 0.443, 0.671 ! 2.FIKT.TEPLota
TBDATA,10, 618, 0.166, 0.247 ! 3.FIKT.TEPLota
TBDATA,13, 618, 0.161, 0.091 ! 4.FIKT.TEPLota
TBDATA,16, 618, 0.046, 0.033 ! 5.FIKT.TEPLota
TBDATA,19, 618, 0.076, 0.008 ! 6.FIKT.TEPLota
TBDATA,22, 64.7E-7, 0.02E-7, ! KOEF.TEPL. ROZŤAŽNOSTI TUH. FÁZY
TBDATA,27, 3.43E-5,          ! KOEF.TEPL. ROZŤAŽNOSTI TEK. FÁZY

/COM, TVORBA KONEČNÝCH PRVKOV
N,1,
N,3,,0.00025
FILL
N,7,0,0.0035
FILL
NGEN,5,7,1,7,1,.0005
MAT,1
E,1,15,17,3,8,16,10,2
E,15,29,31,17,22,30,24,16
MAT,2
E,3,17,19,5,10,18,12,4
E,17,31,33,19,24,32,26,18
E,5,19,21,7,12,20,14,6
E,19,33,35,21,26,34,28,20

/COM, OKRAJ. PODMIENKY A VAZBA UZLOV V RADIÁLNO M SMERE
NSEL,S,LOC,Y
DSYM,SYMM,Y
NSEL,S,LOC,X
DSYM,SYMM,X
NSEL,ALL
D,1,ALL
CP,1,ux,15,16,17,18,19,20,21
CP,2,ux,29,30,31,32,33,34,35
FINISH

/SOLU
/COM, NASTAVENIE ZAČIATOČNEJ TEPLoty
TREF,618
TOFFST,273
TUNIF,618
TIME,1E-5
CNVTOL,F,,,,.001      ! MALÉ ZAČ. ZAŤAŽENIE
                        ! NA ZABEZPEČENIE KONVERGENCIE

SOLVE

```

```

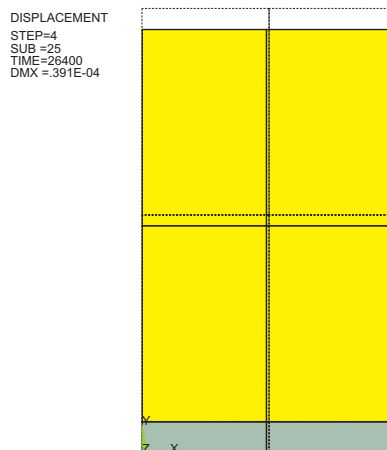
OUTRES,ESOL,1      ! UKLADAJ VÝSLEDKY PRE KAŽDÝ SUBKROK
NSUBST,200
TUNIF,460          ! OCHLADZOVANIE
TIME,3160
SOLVE
TIME,(14400+3160) ! IZOTERMICKÁ VÝDRŽ
SOLVE
TUNIF,18           ! ĎALŠIE OCHLADZOVANIE
TIME,(14400+12000)
SOLVE
FINISH

/POST26
ESOL,2,3,,BFE,TEMP
ESOL,3,3,3,S,INT,SINT
XVAR,2
/GRID,1
/AXLAB,X,TEPLOTA
/AXLAB,Y,INTENZITA NĀPATIA (MPa)
PLVAR,3
FINISH

```

Výsledky

Objemové zmrštenie telesa (polovice tvoriacej plochy telesa) účinkom ochladenia:



Priebeh intenzity napätia na hranici oboch materiálov v závislosti od klesajúcej teploty a výsledná hodnota zvyškového napätia (názorne vidieť prechod z tekutej fázy skla, cez skok pri prechodovej teplote, do tuhej fázy):

