

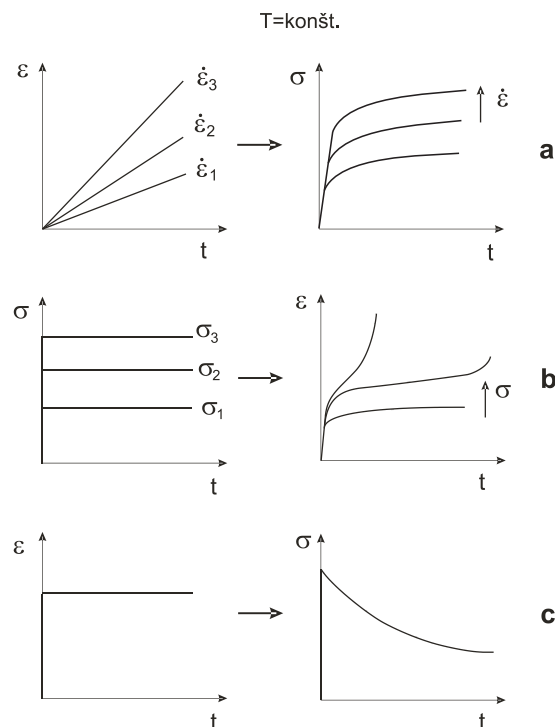
D 15 Viskoplasticita

Pružne plastické konštitutívne teórie, s ktorými sme sa zoberali v častiach D10 až D13, patria do kategórie tzv. časovo nezávislých teórií. Umožňujú tvoriť časovo nezávislé materiálové modely pre pružne plastické úlohy pri ktorých odozva materiálu je zanedbateľne závislá od časovej zmeny zaťažujúcich síl a od časového intervalu, v ktorom sa aplikuje zaťaženie. Tzv. pseudočas sa v nich využíva len na sledovanie histórie a stavu (nelineárneho) zaťažovacieho procesu, bez vlastného fyzikálneho významu.

Pri úlohách kde *deformácia* materiálu je významne ovplyvnená časovým priebehom a dĺžkou časového intervalu zaťaženia, sa využívajú tzv. *viskoelastické* (pozri D 14) a *viskoplastické konštitutívne vzťahy* a z nich odvodené materiálové modely. Viaceré viskoplastické teórie sú podobné časovo nezávislej plasticite tým, že je v nich zahrnuté kritérium plasticity ako začiatok (visko)plastickej deformácie (po túto hranicu je deformácia elastická), ale s tým rozdielom, že funkcia viskoplastického tečenia f môže byť aj väčšia ako nula a koeficient viskoplasticity $\Delta\lambda, \dot{\lambda}$ sa určuje nie z podmienky konzistencie ale pomocou špeciálnej "viskoplastickej" rovnice, ktorá charakterizuje príslušný viskoplastický materiálový model. Úplne analogicky s časovo nezávislou plasticitou možno do viskoplasticity zaviesť aj spevňovanie medze sklzu pomocou experimentálne určenej jednoosovej krivky spevňovania materiálu. Ak medza sklzu je konštantná, hovoríme o ideálne viskoplastickom materiáli.

Základné vlastnosti viskoplastického materiálu možno rovnako ako pri viskoelastícite dobre ilustrovať na experimentálnych výsledkoch jednoosového zaťaženia kovovej vzorky zaťažovanej *pri vyššej konštantnej teplote* v určitom časovom intervale (obr.1).

Obr.1a ukazuje rozdielne tvary ťahového diagramu materiálu pri rozdielnych rýchlostiach deformácie. Vo všeobecnosti modul pružnosti je málo závislý od rýchlosti deformácie, ale medza sklzu, ako aj spevňovacia krivka, sú na rýchlosť deformácie a teplotu citlivé. Pri vyššej teplote dokonca medza sklzu úplne vymizne (obr. 2).

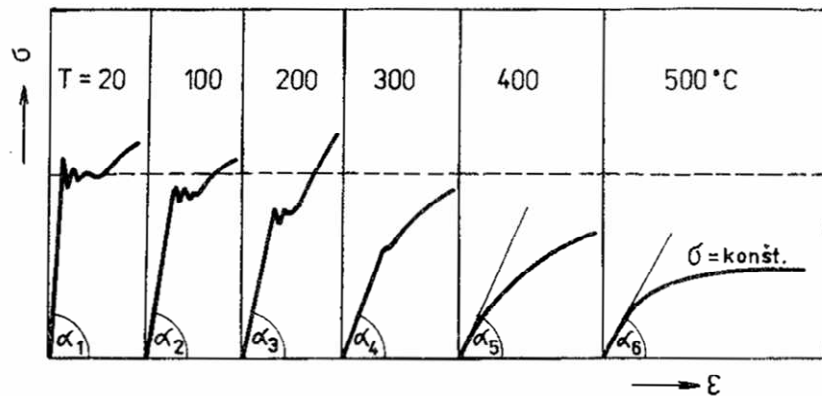


Obr. 1 Dôsledky časovo závislej deformácie kovového materiálu pri vyššej konštantnej teplote: a - závislosť napätia od rýchlosti deformácie, b - kripová deformácia (tečenie materiálu) pri konštantnom napätí, c - relaxácia napätia pri konštantnej deformácii

Na obr.1b vidieť ďalší dôsledok časovej závislosti zaťaženého materiálu, tzv. *tečenie alebo krip* (creep). Pri konštantnom zaťažení na rôznej úrovni dochádza v dostatočne dlhom časovom intervale k nelineárnemu rozvoju nevratných deformácií. Rýchlosť kripovej deformácie sa zväčšuje pri vyšších hodnotách zaťaženia a v celkovom časovom intervale sa mení: Prvý časový interval je charakterizovaný veľkou rýchlosťou deformácie a nazýva sa *primárny krip*, druhý interval má kvázi konštantnú rýchlosť deformácie, je to oblasť *sekundárneho*

křípu. Pri vysokých zaťaženiach alebo pri dlhodobom zaťažovaní môže kripová deformácia dospieť do *terciálneho štádia* so zrýchľujúcou sa deformáciou, ktorá môže dosieť až do kripového lomu.

Tretí dôsledok časovej závislosti materiálu je *napätová relaxácia*, ktorej typický priebeh znázorňuje obr. 1c. Pri relaxačnom teste sa vzorka rýchle natiadne na predpísanú konštantnú jednoosovú deformáciu a v tomto stave sa ponechá dlhší časový interval. Viskózne vlastnosti materiálu vedú pri tom k plynulému poklesu hodnoty napätia v sledovanom časovom intervale. Možnosť výpočtárskej analýzy napätvej relaxácie sa využíva napr. pri návrhu predpätých strojných častí.



Obr. 2 Vplyv teploty na ťahový diagram nízkouhlíkovej ocele

Analogicky s pružne plastickou časovo nezávislou úlohou možno názorne uviesť viskoplasticitu vo forme jednorozmerného modelu, čo je výhodné aj z toho dôvodu, že modely pre viacrozmernú napätosť sa najčastejšie vytvárajú ako zovšeobecnenie jednorozmerných viskoplastických konštitutívnych rovníc. Celková deformácia sa opätovne rozkladá na elastickú a viskoplastickú časť (nepovažujeme za potrebné označovať trvalú deformáciu inak ako v predchádzajúcich častiach o časovo nezávislej plasticite, len si treba uvedomiť, že tentokrát je funkciou reálneho času t a v tomto vzťahu to aj výnimočne explicitne zdôrazníme)

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e + \varepsilon^p(t) \quad (1)$$

Pre jednorozmerné axiálne napätie platí Hookeov zákon s modulom pružnosti v ťahu E

$$\sigma = E\varepsilon^e \quad (2)$$

Analogicky s jednorozmerným časovo nezávislým pružne plastickým modelom zavedieme funkciu viskoplastického zaťažovania [D 10]

$$f(\sigma, \bar{\sigma}_k) = \sigma - \bar{\sigma}_k \quad (3)$$

kde $\bar{\sigma}_k$ je aktuálna medza sklzu materiálu. Pre naše účely rozboru viskoplastických vzťahov zvolíme jednorozmernú Peirce/Peričovu modifikáciu [Lit1] známeho a široko používaného Perzynovho modelu (pozri množstvo zdrojov na internete) pri ktorom pre rýchlosť viskoplastickej deformácie platí

$$\dot{\varepsilon}^p(\sigma, \bar{\sigma}_k) = \frac{1}{\eta} \left[\left(\frac{|\sigma|}{\bar{\sigma}_k} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] \text{sign}(\sigma) \quad \text{ak } f(\sigma, \bar{\sigma}_k) \geq 0$$

$$\dot{\varepsilon}^p(\sigma, \bar{\sigma}_k) = 0 \quad \text{ak } f(\sigma, \bar{\sigma}_k) < 0 \quad (4)$$

kde η a m sú materiálové konštanty pri danej teplote. Pomocou konštanty η , ktorá má rozmer času, možno meniť viskozitu modelu, bezrozmerné číslo m vyjadruje citlivosť materiálu na rýchlosť deformácie.

Predpokladajme, že v (4) je splnená podmienka viskoplastickej deformácie, elastickou deformáciou vyvolané napätie (v ďalšom ho budeme považovať za kladné - ťahové) dosiahlo medzu sklzu, a nech ďalej celková deformácia monotónne narastá s ľubovoľnou (konštantnou) *rýchlosťou deformácie* α podľa vzťahu

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{E} + \alpha t = \varepsilon_0 + \alpha t \quad (5)$$

kde, kvôli zjednodušeniu predpokladáme konštantnú medzu sklzu rovnú začiatočnej medzi sklzu σ_k (tzv. ideálne viskoplastický materiál).

Pre rýchlosť viskoplastickej deformácie podľa (4)₁ s $m = 1$ (aby bolo možné analytické riešenie pre ε^p a σ) a $\bar{\sigma}_k = \sigma_k$ potom dostávame

$$\dot{\varepsilon}^p(t) = \frac{d\varepsilon^p(t)}{dt} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_k} - 1 \right] = \frac{1}{\eta} \left[\frac{E[\varepsilon(t) - \varepsilon^p(t)]}{\sigma_k} - 1 \right] = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\varepsilon(t) - \varepsilon^p(t)}{\varepsilon_0} - 1 \right] = \frac{1}{\eta \varepsilon_0} [\alpha t - \varepsilon^p(t)] \quad (6)$$

Riešením tejto dierenciálnej rovnice so začiatočnou podmienkou $\varepsilon^p(0) = 0$ dostaneme veľkosť viskoplastickej deformácie v čase t

$$\varepsilon^p(t) = \alpha \left[t - \eta \varepsilon_0 \left(1 - e^{-t/(\eta \varepsilon_0)} \right) \right] \quad (7)$$

a po dosadení tohto výsledku spolu s (5) do Hookeovho zákona $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$ aj napätie ako funkciu času

$$\sigma(t) = \sigma_k \left[1 + \alpha \eta \left(1 - e^{-t/(\eta \varepsilon_0)} \right) \right] \quad (8)$$

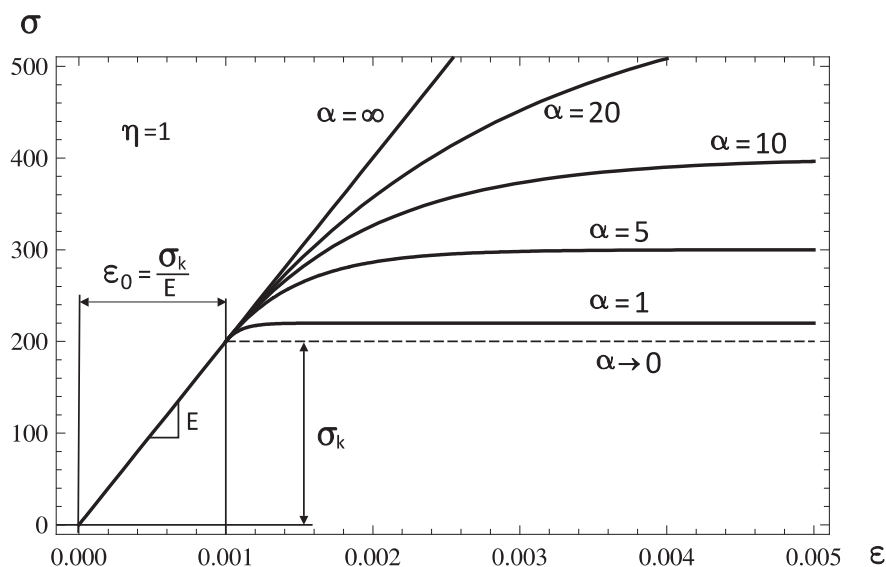
Pomocou tohto vzťahu možno simulovať klasickú jednoosovú krípvú závislosť materiálu (závislosť napätia od času pri zadanej konštantnej rýchlosti deformácie α). Pravda, z praktických dôvodov (kvôli ľahšiemu porovnávaní s experimentálnymi meraniami) je výhodnejšie vyjadriť zmenu napätia v závislosti od deformácie ε . Transformáciu času na meniacu sa deformáciu dostaneme z (5)

$$t = t(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\alpha} \quad (9)$$

Dosadením tohto vzťahu do (8) dostaneme

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_k \left\{ 1 + \alpha \eta \left[1 - e^{-\frac{1}{\eta \alpha} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)} \right] \right\} \quad (10)$$

Krípové krivky určené z tohto vzťahu s hodnotami $\sigma_k = 200$ MPa, $E = 200000$ MPa a so súčinom materiálových konštánt $\alpha \eta$ z rozsahu od 0 po ∞ sme znázornili na obr. 3.



Obr.3 Krípové krivky jednorozmerného modelu

S uvedenými zjednodušujúcimi podmienkami ($\bar{\sigma}_k = \sigma_k$, $m = 1$) možno ľahko ukázať, že model je schopný simulovať aj napätovú relaxáciu pri aplikovaní konštantnej deformácie ε_0 . V takom prípade pre napätie modelu platí funkcia

$$\sigma = E(\varepsilon_0 - \varepsilon_p) = \sigma_0 - E\varepsilon_p \quad (11)$$

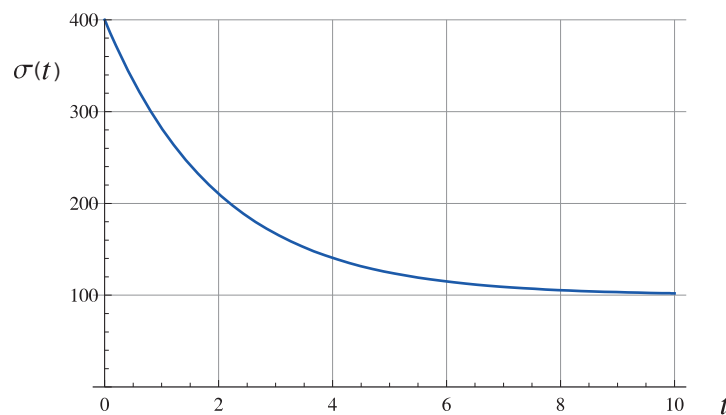
do ktorej treba určiť ε_p z diferenciálnej rovnice (4)

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\sigma_0 - E\varepsilon^p}{\sigma_k} - 1 \right] \quad (12)$$

so začiatočnou podmienkou $\varepsilon^p(0) = 0$. Riešenie dáva funkciu relaxácie napätia v tvare

$$\sigma(t) = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_k)(1 - e^{-\frac{E}{\eta\sigma_k}t}) \quad (13)$$

ktorej grafická ilustrácia pre hodnoty $E = 10^5$ MPa, $\sigma_0 = 400$ MPa, $\sigma_k = 100$ MPa, $\eta = 2000$ sek, je znázornená na obr. 4.



1. Integračný algoritmus von Misesovho viskoplastického modelu

Numerická algoritmizácia 3D viskoplastických materiálových modelov sa prirodzene opiera o postupy použité pri modeloch časovo nezávislej plasticity. Pri stručnom opise takéhoto postupu a tvorbe základných rovníc viskoplastického materiálového modelu využijeme postup uvedený v D12 pri numerickej integrácii konštitutívnych rovníc von Misesovho modelu s izotropným spevňovaním. V uvedenom doplnku možno tiež nájsť opis princípu integračnej metódy elastický prediktor/plastický korektor i fyzikálne vysvetlenie veličín, ktoré nie sú opätovne uvádzané v tejto časti.

a) Testovací elastický krok (elastický prediktor)

Najprv sa predpokladá, že v kroku $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$ prírastok celkovej deformácie $\Delta\varepsilon$ v uvažovanom bode je elastický ($\Delta\lambda = 0$). Potom z prírastku celkovej deformácie a známych hodnôt v čase t_n možno určiť tzv. skúšobné hodnoty

$$\begin{aligned} \varepsilon^{e\ test} &= \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon \\ \varepsilon^{p\ test} &= \varepsilon_n^p \\ \bar{\varepsilon}^{p\ test} &= \bar{\varepsilon}_n^p \\ \sigma_{n+1}^{test} &= \mathbf{D}^e : \varepsilon^{e\ test} \end{aligned} \quad (14)$$

Nasleduje kontrola testovacieho elastického stavu pomocou podmienky plasticity. Ak platí

$$f^{test} \equiv f[\sigma^{test}, \sigma(\bar{\varepsilon}^{p\ test})] \leq 0 \quad (15)$$

znamená to, že skúšobné napätie σ_{n+1}^{test} vyšetřovaného bodu leží v elastickej oblasti, alebo sa práve nachádza na

ploche viskoplasticity, a môže byť akceptované ako výsledné napätie σ_{n+1} . Platí to aj pre ostatné veličiny v (14). V opačnom prípade sa napätie musí sa opraviť (ako aj ďalšie testovacie hodnoty) pomocou algoritmu viskoplastického korektora (v našom prípade podľa zovšeobecneného Peirce/Peričovho vzťahu).

b) Viskoplastický korektor

Pre napäťový bod, ktorý nespĺňa podmienku (15), t.j. pre ktorý $f^{test} > 0$, je potrebné vykonať numerickú integráciu nelineárnych funkcií v intervale $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$. V algoritme viskoplastického korektora opäť využijeme *plne implicitnú spätnú Eulerovu metódu* a dostaneme rovnice

$$\sigma_{n+1} = \sigma^{test} - \Delta\lambda \mathbf{D}^e : \mathbf{f}_{n+1} \quad (16)$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1} = \bar{\varepsilon}_n + \Delta\lambda \quad (17)$$

s viskoplastickým násobkom $\Delta\lambda$, pre ktorý v našom prípade platí

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta t}{\eta} \left[\left(\frac{\bar{\sigma}(\sigma_{n+1})}{\sigma_k(\bar{\varepsilon}_{n+1})} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] \quad (18)$$

a kde Δt je časový prírastok v zaťažovacom kroku a $\bar{\sigma}$ je von Misesovo ekvivalentné napätie. Ak sa podarí vyriešiť tento systém nelineárnych rovníc, potom bude možné upraviť deformácie zo vzťahov

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \mathbf{f}_{n+1}, \quad \varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1}^{test} - \Delta\lambda \mathbf{f}_{n+1} \quad (19)$$

Systém nelineárnych rovníc (16) a (17) možno pre von Misesov materiálový model analogicky ako v D12 zredukovať na jedinou nelineárnu rovnicu s jedinou neznámou $\Delta\lambda$ a pri lineárnom spevňovaní možno hľadané hodnoty v čase t_{n+1} dokonca určiť priamo z hodnôt skúšobného elastického kroku. Ako sme už uviedli v D11 von Misesov vektor plastického tečenia

$$\mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad (20)$$

je čisto deviatorický, a preto je výhodné rozdeliť napätie na deviatorickú a objemovú časť

$$\sigma_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + \sigma_{m n+1} \mathbf{I} \quad (21)$$

Objemová zložka σ_{n+1} sa v (21) pri algoritme nemení

$$\sigma_{m n+1} = \sigma_{m n+1}^{test} \quad (22)$$

a treba určiť len deviator napätia, pre ktorý podľa Eulerovej metódy analogicky s (16) platí

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} - \Delta\lambda \mathbf{D}^e : \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} - \Delta\lambda 2G \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test} - \Delta\lambda 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \quad (23)$$

a po úprave

$$\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\lambda 2G}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \right) \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test}$$

Pretože výraz v zátvorke je skalár, obe deviatorické napätia sú kolineárne

$$\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{test}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{test}\|}$$

a keď to využijeme v (23) dostaneme jednoduchý vzťah pre výpočet deviatora napätia v čase t_{n+1}

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2G}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{test}\|} \Delta\lambda \right) \mathbf{s}_{n+1}^{test} = \left(1 - \frac{3G}{\bar{\sigma}_{n+1}^{test}} \Delta\lambda \right) \mathbf{s}_{n+1}^{test} = k \mathbf{s}_{n+1}^{test} \quad (24)$$

kde $\bar{\sigma}_{n+1}^{test}$ je elastická skúšobná hodnota von Misesovho ekvivalentného napätia. Aplikáciou (24) aj na definíciu von Misesovho ekvivalentného napätia dostávame jeho redukovanú hodnotu

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1}^{test} - 3G\Delta\lambda \quad (25)$$

Výsledný vzťah pre výpočet $\Delta\lambda$ dostaneme dosadením tohto vzorca spolu so (17) do (18)

$$\Delta\lambda - \frac{\Delta t}{\eta} \left[\left(\frac{\bar{\sigma}_{n+1}^{test} - 3G\Delta\lambda}{\sigma_k(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\lambda)} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 0 \quad (26)$$

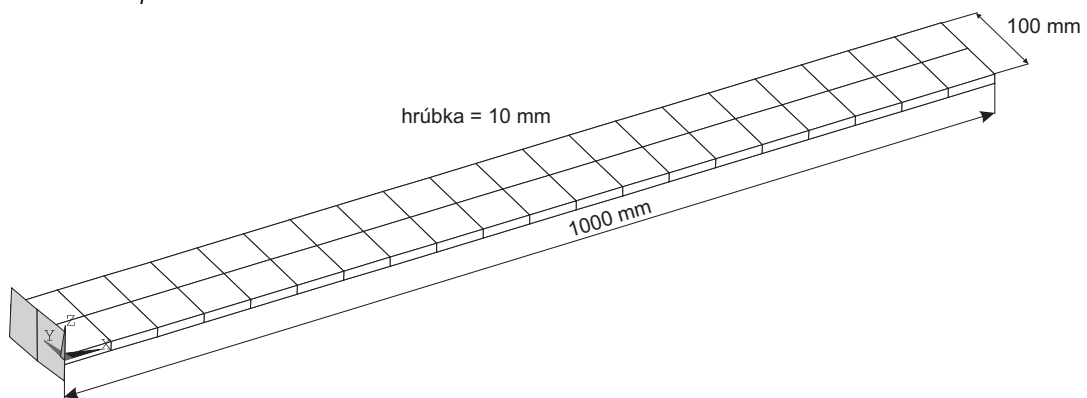
alebo po úprave

$$\left(\bar{\sigma}_{n+1}^{test} - 3G\Delta\lambda \right) \left(\frac{\Delta t}{\eta\Delta\lambda + \Delta t} \right)^m - \bar{\sigma}_k(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\lambda) = 0 \quad (27)$$

Viskoplastický násobok $\Delta\lambda$ možno z nelineárnej rovnice (27) určiť Newton-Raphsonovou metódou a potom z rovníc (24) a (21) napätie. Tak isto už možno upraviť všetky ďalšie napätové i deformačné veličiny, ktoré potom slúžia ako východzie hodnoty pre ďalší časový krok.

Príklad 1

Pre podlhovastú na jednej strane votknutú obdĺžnikovú dosku, ktorej výpočtový model a rozmery sú znázornené na obrázku, určte pomocou programu ANSYS v intervale 0 až 0,5 hod. časový priebeh maximálneho ohybového napätia, časový priebeh plastickej deformácie a priebeh priehybu dosky na voľnom konci, keď ju náhle zaťažíme tlakom $p = 500$ Pa. Poissonovo číslo materiálu $\mu = 0,3$ a modul pružnosti $E = 10000$ MPa nie sú časovo závislé. Použite Peirce/Peričov viskoplastický model. Vyhodnotením experimentálneho testu materiálu sa zistili tieto hodnoty materiálových konštánt $m = 0,8$ a $\eta = 0,01$ hod. Medza začiatku plastickej deformácie je $\sigma_k = 6$ MPa a spevňovací modul $E_T = 2500$ MPa.



Riešenie

Úlohu sme v interaktívnom móde programu zadali a vypočítali týmto postupom:

1. Zadanie názvu úlohy

Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = OhybViskoPlastDosky, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu

Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Shell Elastic 4node 181, OK, Close;

3. Hrúbka dosky

Main Menu>Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... OK, TK(I) = 10, OK, Close;

4. Materiálové údaje

Lineárne

Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 10000, PRXY = 0.3, OK,

Nelineárne a bilineárne spevňovanie

Nonlinear>Inelastic>Rate Dependent>Visco-Plasticity>Isotropic Hardening Plasticity>

Mises Plasticity>Bilinear, Peirce Model, m = 0.8, Gamma = 0.01, OK, Yield Stss = 6, Tang Mod = 2500, OK, Material, Exit;

5. Vytvorenie bodov plochy prvkov (číslovanie bodov je automatické)

*Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS: X = 0, Y = 0, Apply,
X = 1000, Y = 0, Apply,
X = 1000, Y = 100, Apply,
X = 0, Y = 100, OK;*

6. Vytvorenie plochy prvkov

Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Arbitrary>Through KPs: ↑KP1,↑KP2,↑KP3,↑KP4, OK;

7. Vytvorenie prvkov

*Preprocessor>Meshing>Mesh Tool: Size Controls: Areas, Set: Pick All, SIZE = 50, OK;
(Preprocessor>Meshing>Mesh Tool): Mesh, Pick All, Close;*

8. Upevnenie modelu

*Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes ↑,
P: Tri uzly na ľavej strane obdĺžnika, OK, All DOF, Value = 0, OK;*

9. Zaťaženie tlakom p

Solution>Define Loads>Apply>Structural>Pressure>On Areas ↑, Pick All, Value = 0.0005, OK;

10. Riadiace príkazy nelineárneho riešenia a výpočet

Solution>

P:Unabridged Menu

Load Step Opts>Time/Frequenc>Time - Time Step..., TIME = 0.5, DELTIM = 0.005, KBC = Stepped, Minimum time step = 1E-5, Maximum time step = 0.01, OK;

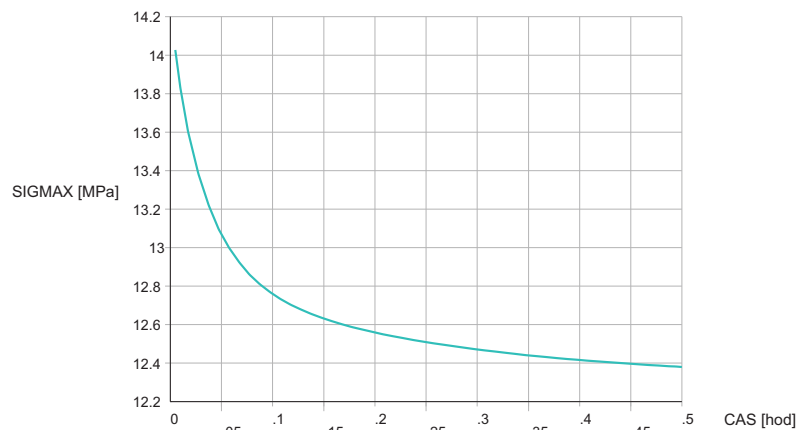
Load Step Opts>Output Ctrl>DB/Results File..., FREQ=Every Substep, OK;

Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

11. Vykreslenie relaxácie ohybového napätia (v krajnom vlákne votknutého prierezu), viskoplastickej deformácie (v krajnom vlákne votknutého prierezu) a maximálneho priehybu

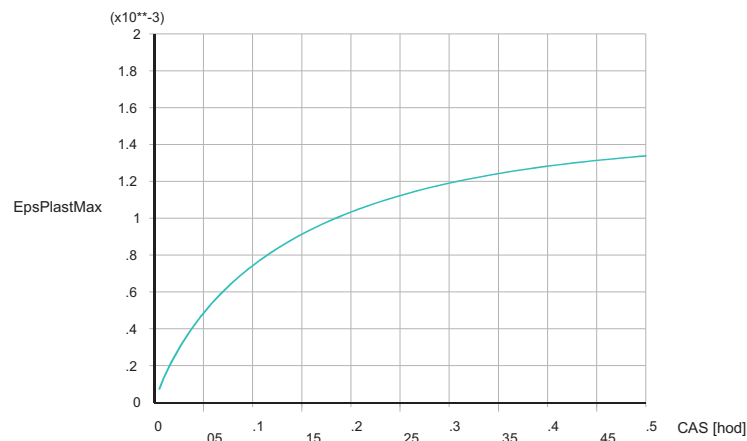
Utility Menu>Plot>Elements

TimeHist Postpro>Kliknite na prvú ikonku zľava (Add Data), Nodal Solution>Stress>X-Component of stress, Result is taken from the = bottom, OK, Kliknite uzol vo votknutí, OK, Píknite tretiu ikonku zľava (Graph Data),



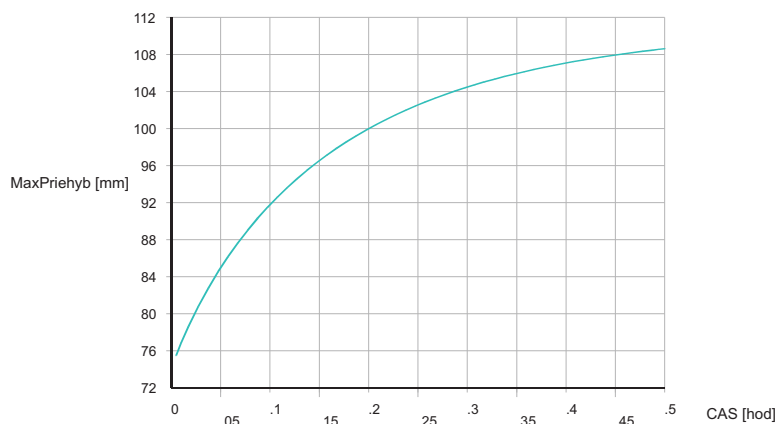
Utility Menu>Plot>Elements

TimeHist Postpro>Kliknite na prvú ikonku zľava (Add Data), Nodal Solution, Plastic strain, X-Component of plastic strain, Result is taken from the = bottom, OK, Kliknite uzol vo votknutí, OK, Kliknite na tretiu ikonku zľava (Graph Data),



Utility Menu>Plot>Elements

TimeHist Postpro>Kliknite prvú ikonku zľava (Add Data), Nodal Solution, DOF Solution, Z-Component of displacement, OK, Kliknite uzol na voľnom konci dosky, OK, Kliknite na tretiu ikonku zľava (Graph Data),



11. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy

Ans.sys Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;

Dosku, vzhľadom na jej tvar, možno považovať za nosník a začiatočné maximálne napätie (v čase $t = 0$) a i začiatočný maximálny priehyb možno približne skontrolovať pomocou vzorcov platných pre ohyb nosníka.

Čiarové zaťaženie nosníka (na jednotku dĺžky) v našom prípade je

$$q = \frac{Q}{\ell} = \frac{pS}{\ell} = \frac{0,0005 \cdot (1000 \cdot 100)}{1000} = 0,05 \text{ N/mm}$$

Maximálne ohybové napätie nosníka vo votknutí potom je

$$\sigma_{\text{omax}} = \frac{M_{\text{omax}}}{W_o} = \frac{q\ell \cdot \ell / 2}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{50 \cdot 500}{\frac{1}{6}100 \cdot 10^2} = 15,00 \text{ MPa}$$

a pre maximálny priehyb platí

$$w_{\text{max}} = \frac{q\ell^4}{8EI} = \frac{q\ell^4}{8E \frac{1}{12}bh^3} = \frac{0,05 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 10^4 \frac{1}{12}100 \cdot 10^3} = 75 \text{ mm}$$

2. Kríповé modely bez plochy plastického tečenia

Perzynov model krípu a jeho modifikácie možno využiť pre relatívne krátke časové intervaly, najmä pre problémy krátkodobo pôsobiaceho rázového pružne plastického namáhania, pretože pri dlhšom časovom rozpätí numerické riešenie diverguje. Pri dlhých časových intervaloch klasického krípu s vyššími teplotami sa uplatňujú viskoplastické modely bez elastickej oblasti s ohraničujúcou plochou plasticity a teda bez medze určujúcej začiatok časovo závislej plastickej deformácie. Pri takýchto modeloch takto vzniká trvalá kríповá

deformácia pri ľubovoľnej nenulovej hodnote napätia, čo pri vyšších teplotách je prijateľné aj pre kovové materiály (obr.2). S ohľadom na predchádzajúci výklad kríbovej problematiky stačí tieto modely charakterizovať jednorozmernými vzťahmi pre určovanie rýchlosti (visko)plastickej deformácie $\dot{\epsilon}^p$.

Všeobecne známy a často využívaný je Bailey-Nortonov krípový zákon (mocninný krípový zákon)

$$\epsilon^p = A \sigma^n t^m \quad (28)$$

s teplotne závislými materiálovými konštantami A, n, m , ktorého rýchlostný (prírastkový tvar je

$$\dot{\epsilon}^p = A \sigma^n m t^{m-1} \quad (29)$$

Je to tzv. formulácia s časovým spevňovaním (pri nezmenených materiálových konštantách väčšie napätie zvýši rýchlosť deformácie a časový priebeh deformácie vykazuje menšie hodnoty ϵ^p).

Ak z (28) vyjadríme čas a dosadíme ho do (29) dostaneme formuláciu s deformačným spevňovaním (pri nezmenených materiálových konštantách väčšie napätie zvýši rýchlosť deformácie a pri tom istom čase model dospeje k menšej hodnote ϵ^p).

$$\dot{\epsilon}^p = A^{1/m} m \sigma^{n/m} (\epsilon^p)^{(m-1)/m} \quad (30)$$

Pri numerických metódach a obzvlášť v MKP sa viac uplatňujú formulácie s deformačným spevňovaním a poväčšine aj vykazujú lepšiu zhodu s nameranými experimentálnymi hodnotami.

Veľké množstvo kríbových rovníc možno nájsť v tvare súčinu navzájom nezávislých funkcií napätia, teploty a času

$$\dot{\epsilon}^p = F(\sigma, T, t) = f(\sigma) g(T) h(t) \quad (31)$$

kde T je absolútna teplota a funkcie f, g, h sa určujú experimentálne. Funkcia vyjadrujúca vplyv teploty má obyčajne tvar Arrheniovoho zákona

$$g(T) = C e^{-\frac{Q}{RT}} \quad (32)$$

kde C je konštanta, Q [J mol⁻¹] je aktivačná konštanta obyčajne nezávislá na teplote a $R = 8,31$ [J mol⁻¹ K⁻¹] je univerzálna plynová konštanta.

Záujemca môže nájsť množstvo kríbových rovníc napr. v manuáli programu Ansys; sú rozdelené podľa spôsobu integrácie na explicitné a implicitné a podľa určenia na rovnice pre kríp primárny, sekundárny alebo primárny i sekundárny.

Príklad 2

Kovový prút o dĺžke $\ell = 1000$ mm s prierezom $S = 100$ mm² zaťažíme silou $F = 10000$ N pri konštantnej teplote 350 °C. Materiál pri tejto teplote vykazuje jednorozmernú krípovú deformáciu s rýchlosťou

$$\dot{\epsilon}^p = 10^{-6} \sqrt{\sigma} t^{-0,8}$$

kde čas je vyjadrený v hodinách a napätie v N/mm², t.j. v MPa. Určte pomocou programu Ansys celkové predĺženie prúta v čase $t = 100$ hod.

Riešenie

Vzhľadom na jednoduchosť telesa a relatívne malý časový interval úlohy zvolíme explicitnú metódu integrácie. Z ponuky explicitných kríbových rovníc s časovým spevňovaním programu Ansys pre našu úlohu vyhovuje rovnica

$$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} t^{C_3} e^{-C_4/T}$$

kde $C_4 = 0$ (teplota sa nemení) a treba zadať $C_6 = 1$, čím zvolíme časové spevňovanie (pozri krípové rovnice v manuáli programu).

Úlohu sme v interaktívnom móde programu zadali a vypočítali týmto postupom:

1. Zadanie názvu úlohy

Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = Kríp ťahaného prúta, OK;

2. Zadanie typu prvku pre úlohu

Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add... Link 2D Spar 1, OK, Close;

3. Prierez prúta

Main Menu>Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete, Add... ,OK, AREA = 100, OK, Close;

4. Materiálové údaje

Lineárne

Preprocessor>Material Props>Material Models, Structural, Linear, Elastic, Isotropic, EX = 100000, PRXY = 0.3, OK,

Krípová rovnica

Nonlinear>Inelastic> Rate Dependent>Creep>Creep only>Mises Potential>Explicit, C1 = 1E-6, C2 = 0.5, C3 = -0.8, C6 = 1, OK, Material, Exit;

5. Vytvorenie uzlov (číslovanie bodov je automatické)

*Preprocessor>Modeling>Create>Nodes>In Active CS: X = 0, Y = 0, Apply,
X = 1000, Y = 0, OK;*

6. Vytvorenie prvku (prúta)

Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Trough Nodes: ↑KP1,↑KP2, OK;

7. Upevnenie prúta a zadanie sily a teploty

*Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes ↑, Kliknite ľavý uzol, OK,
All DOF, Value = 0, OK;*

*Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Nodes ↑,Kliknite pravý uzol, OK,
FX = 10000, OK;*

Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Temperature>On Nodes>Nodes ↑, Pick All, Val1 = 350, OK;

8. Riadiace príkazy nelineárneho riešenia a výpočet

Solution>

P:Unabridged Menu

Load Step Opts>Time/Frequenc>Time and Substps..., TIME = 100, NSUBST = 2000, KBC=Stepped, OK;

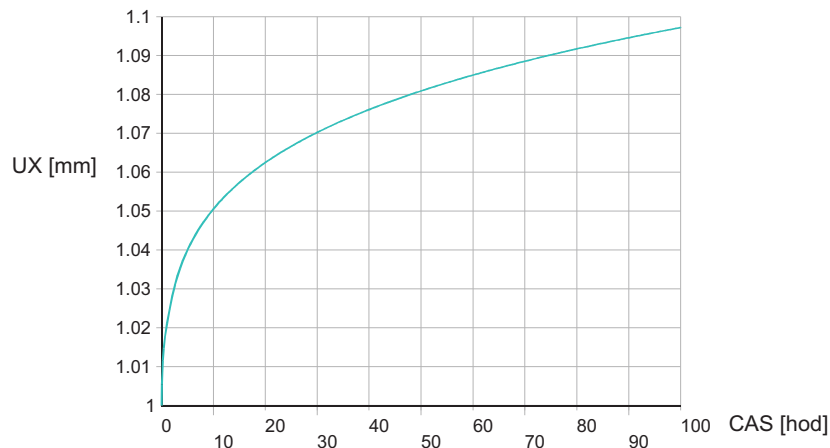
Load Step Opts>Output Ctrl>DB/Results File..., FREQ=Every Substep, OK;

Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

11. Vykreslenie krípového posuvu koncového bodu prúta

Utility Menu>Plot>Elements

TimeHist Postpro>Kliknite prvú ikonku zľava (Add Data), Nodal Solution, DOF Solution, X-Component of displacement, OK, Kliknite uzol na voľnom konci prúta, OK, Kliknite na tretiu ikonku zľava (Graph Data),



11. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy

Ansys Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;

Kontrola pružného posunutia koncového bodu prúta

$$\Delta l = \frac{F\ell}{ES} = \frac{10^4 \cdot 10^3}{10^5 \cdot 10^2} = 1 \text{ mm}$$

Literatúra

[Lit1] E.A. de Souza Neto, D. Perič, D.R.J. Owen: Computational Methods for Plasticity. *Theory and Applications*. Wiley, 2008