

D 16 Prenos tepla

Prenosom tepla, s obmedzením na tuhé telesá, sme sa už čiastočne zaoberali v D7 a v [1]; v tomto doplnku sa k prenosu tepla vrátíme komplexnejším pohľadom.

Tri spôsoby prenosu tepla

Pod prenosom tepla sa rozumie vedecká disciplína, ktorá sa zaoberá prenosom tepelnej energie v telesách a tekutinách (kvapalinách a plynoch) vyvolanom rozdielom teplôt. Rozoznávame tri spôsoby prenosu tepla:

- a) vedením (kondukciou)
- b) prúdením (konvekciou)
- c) žiarením (radiáciou)

Tepló (tepelná energia) určitého množstva látky predstavuje súhrn priemerovanej kinetickej energie jej častíc (molekúl a atomov). Pri prenose tepla vedením sa uskutočňuje výmena energie medzi stýkajúcimi sa časticami s rozdielnymi teplotami. Kondukcia silne závisí od vlastností média a vyskytuje sa nielen v tuhých telesách ale aj v kvapalinách a plynoch.

Molekuly kvapalín a plynov sa môžu voľne pohybovať a pri tomto pohybe z chladnejšej do teplejšej oblasti prenášajú energiu. Tento prenos tepla sprevádzaný aj medzimolekulovou kondukciou sa nazýva prenos tepla prúdením. Ak pohyb tekutiny vyvolávajú len rozdiely jej hustoty spôsobené rozdielnou teplotou, hovoríme o voľnej, resp. prirodzenej konvekcii. Ak je prúdenie vyvolané vonkajšou silou (pumpovanie, fúkanie a pod.) hovoríme o vynútenej konvekcii.

Všetky telesá s nenulovou absolútnou teplotou vyžarujú tepelnú energiu. Tepelná radiácia je jediný spôsob prenosu tepla, ktorý nevyžaduje materiálne médium, aby došlo k prenosu energie. Tepló sa vyžaruje z povrchu objektu prostredníctvom elektromagnetických vln. Keď tieto vlny zasiahnu povrch iného objektu, časť energie sa odrazí, časť sa pohltí a zvyšok sa šíri ďalej.

Pri reálnych problémoch prenosu tepla v technickej praxi sa obyčajne stretávame so všetkými tromi spôsobmi prenosu tepla. Často však ich podiel je kvantitatívne výrazne rozdielny a úlohu možno mnohokrát redukovať len na jeden, ktorý výrazne prevláda v celkovom prenose energie.

Špeciálnym prípadom zmeny tepelnej energie sú fázové premeny látky (var, kondenzácia, roztápanie, tuhnutie), kedy pri konštantnej teplote látka spotrebuje teplo (pri uvoľňovaní medzimolekulových väzieb) alebo vydáva teplo (pri vytváraní pevnejších medzimolekulových väzieb látky).

Základné vzťahy

Pri analýze prenosu tepla sa využívajú vzťahy, ktoré kvantifikujú množstvo energie, ktoré prejde za jednotku času cez jednotku plochy, pričom hnacou silou tejto rýchlosti energetického toku je teplotný rozdiel, resp. teplotný gradient. Pri prenose tepla vedením sa tento vzťah nazýva Fourierov zákon, ktorý pre jednorozmerné vedenie tepla má tvar

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

kde q [W/m^2] označuje hustotu tepelného toku v smere x , λ [$W/(mK)$] je súčiniteľ tepelnej vodivosti látky, T [K] je teplota a dT/dx je teplotný gradient v smere x . (Tepló je vedené v smere klesajúcej teploty a preto pri kladnom q je teplotný gradient záporný.) Hodnoty koeficientu vedenia tepla pre niektoré materiály sme uviedli v tab. 1.

Pri prenose tepla medzi prúdiacou tekutinou s teplotou T_{tek} a stenou tuhého telesa s teplotou T sa uplatňuje Newtonov zákon ochladzovania

$$q = h(T - T_{tek}) \quad (2)$$

kde h [$W/(m^2K)$] je koeficient prestupu tepla konvekciou (koeficient prestupovej vrstvy). Typické hodnoty tohoto koeficientu uvádzame v tab. 2.

Množstvo tepla za jednotku času (tepelný tok) Q [W], ktoré môže vyžiariť plocha S absolútne čierneho telesa s teplotou T udáva Stefan-Boltzmannov zákon

$$Q = \sigma T^4 S \quad (3)$$

kde σ [W/(m²K⁴)] je Stefan Boltzmannova konštanta ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$) a T je absolútna teplota plochy. Teplo, ktoré vyžaruje reálny povrch pri tej istej teplote je vo všeobecnosti menšie, čo sa vyjadruje bezrozmerným násobkom (emisivitou) $\varepsilon < 1$. Ak horúci objekt s plochou S_1 , emisivitou ε_1 a teplotou T_1 je celý obkolesený omnoho väčšou plochou o teplote T_2 tepelný tok je

$$Q = qS_1 = \varepsilon_1 \sigma S_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (4)$$

Pokiaľ analyzujeme množstvo vzájomnej výmeny vyžarovaného tepla dvoch telies s plochami S_1 a S_2 , vzťah (4) sa komplikuje a možno ho formálne vyjadriť v tvare

$$Q = f_1 f_2 \varepsilon_1 \sigma S_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (5)$$

kde bezrozmerný súčiniteľ f_1 vyjadruje emisno-absorbčné vlastnosti oboch plôch a f_2 vzdialenosť a vzájomnú geometrickú orientáciu oboch vyžarujúcich plôch.

Tabuľka 1 Niektoré hodnoty koeficientu tepelnej vodivosti [Lit1]

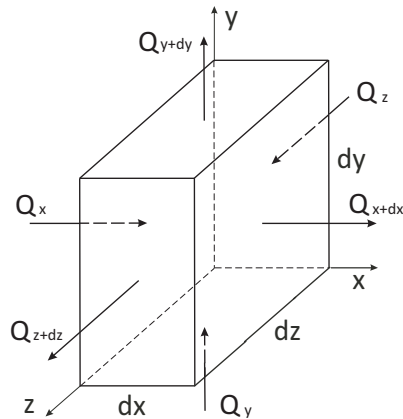
Materiál	λ [W/(mK)]
<i>Kovy</i>	
Čisté striebro	410
Čistá meď	385
Čistý hliník	200
Čisté železo	73
<i>Zliatiny</i>	
Nehrdzajúca oceľ (18% Cr, 8% Ni)	16
Hliníková zliatina (4,5% Cr)	168
<i>Nekovové materiály</i>	
Plastická látka	0.6
Drevo	0.2
<i>Kvapaliny</i>	
Voda	0,6
<i>Plyny</i>	
Suchý vzduch (pri atmosférickom tlaku)	0,025

Tabuľka 2 Niektoré hodnoty koeficientu prestupu tepla konvekciou [Lit1]

h [W/(m ² K)]	
Plyny (neprúdiace)	15
Prúdiace plyny	15 - 250
Kvapaliny (neprúdiace)	100
Prúdiace kvapaliny	100 - 2000
Vriace kvapaliny	2000 - 35000
Kondenzujúce pary	2000 - 25000

Rovnica vedenia tepla

Základnou (primárnou) premennou, ktorú treba určiť pri úlohe vedenia tepla v tuhom telese, je *teplota*, ako funkcia polohy pri ustálenom stave $T \equiv T(x,y,z)$, resp. ako funkcia polohy a času $T \equiv T(x,y,z,t)$, pri nestacionárnom vedení tepla. Z tejto funkcie potom už možno určiť sekundárne premenné: teplotný gradient pomocou parciálnej derivácie tejto funkcie, alebo tepelný tok z Fourierovho zákona. Funkcia $T \equiv T(x,y,z,t)$ sa určuje z diferenciálnej rovnice vedenia tepla, ktorú teraz odvodíme z bilančných vzťahov (zo zákona zachovania energie) diferenciálneho elementu vyrezaného myslennými rezmi z telesa, v ktorom prebieha proces vedenia tepla (obr. 1).



Obr.1 Diferenciálny element pre analýzu vedenia tepla v telese

Vo všeobecnom bode telesa (x,y,z) hodnoty množstva vedeného tepla za jednotku času Q [$W \equiv J/s$] v smere súradnicových osí rozvineme do skráteneho (dvojčlenného) Taylorovho radu a dostávame

$$\begin{aligned} Q_{x+dx} &= Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \\ Q_{y+dy} &= Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \\ Q_{z+dz} &= Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (6)$$

Budeme tiež predpokladať, že v elemente sa generuje teplo

$$Q_{gen} = \bar{Q} dx dy dz \quad (7)$$

kde \bar{Q} [W/m^3] je výdatnosť tepelného zdroja.

Veľkosť akumulovaného tepla v elemente (t.j. maximálne množstvo tepla, ktoré je schopný v sebe "usklaďniť") závisí od špecifickej tepelnej kapacity materiálu c [$J/(kgK)$], jeho hmotnosti (t.j. od hustoty materiálu ρ a objemu) a rýchlosti zmeny teploty

$$Q_{akum} = c \rho dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

Tepelná bilancia elementu za jednotku času sa potom zostaví takto: Súčet privedeného tepla a generovaného tepla sa musí rovnať súčtu odvedeného tepla a akumulovaného tepla. S prihliadnutím na obr. 1 potom dostávame rovnicu

$$Q_x + Q_y + Q_z + \bar{Q} dx dy dz = Q_{x+dx} + Q_{y+dy} + Q_{z+dz} + \rho c dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

Do tejto rovnice dosadíme vzťahy (6) a usporiadame členy

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz + \bar{Q} dx dy dz = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (10)$$

Podľa Fourierovho zákona (1) platí

$$Q_x = q_x dydz = -\lambda_x dydz \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$Q_y = q_y dx dz = -\lambda_y dx dz \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$Q_z = q_z dy dz = -\lambda_z dy dz \frac{\partial T}{\partial z}$$

Po dosadení týchto vzťahov do (10) a vydelením rovnice objemom elementu $dx dy dz$ dostávame diferenciálnu rovnicu nestacionárneho vedenia tepla

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \bar{Q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

Ak sa materiál z hľadiska tepelnej vodivosti chová izotropne ($\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$) rovnica sa zjednoduší

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\bar{Q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (12)$$

kde $\alpha = \lambda / (\rho c)$ sa nazýva súčiniteľ tepelnej difuzivity.

Ak sa analyzuje ustálené vedenie tepla bez vnútornej generácie tepla, rovnica sa zmení na

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

a keď to bude jednorozmerná úloha, platí

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (14)$$

Pretože (1) je diferenciálna rovnica 1. rádu vzhľadom na čas, musíme pre ňu zadať jednu *začiatočnú podmienku*

$$T(x, y, z, t = 0) = T_0(x, y, z) \quad (15)$$

kde funkcia T_0 udáva rozdelenie teploty na začiatku riešenia úlohy v celom objeme telesa.

Okrem toho pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu (vzhľadom na polohové premenné) musíme zadať dve *okrajové podmienky*. Dirichletova okrajová podmienka v tomto prípade je

$$T(x, y, z, t) = T_1(x, y, z, t) \quad \text{na } S_1 \quad (16)$$

kde S_1 je časť povrchu telesa, kde sme predpísali teplotu pomocou funkcie T_1 .

Neumannova okrajová podmienka predpisuje hustotu tepelného toku \bar{q} (vo W/m^2) cez plochu S_2

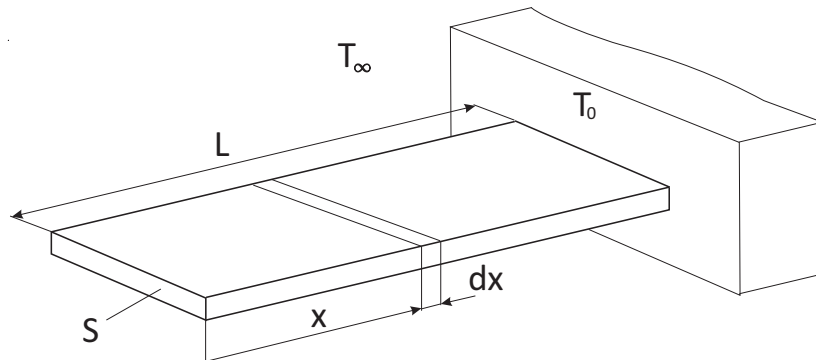
$$\bar{q} = \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \cos \beta + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \cos \gamma \quad \text{na } S_2 \quad (17)$$

kde vystupujú smerové kosínusy vonkajšej normály k ploche. Vo všeobecnosti plochy S_1 a S_2 predstavujú súhrn viacerých plôch príslušného typu a platí $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = 0$, kde S je celkový povrch telesa.

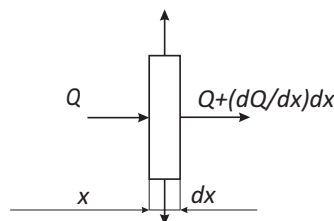
Príklad jednorozmerného vedenia tepla

Uvažujme prút (chladiace rebro) konštantného prierezu S na obr. 2, ktorého dĺžka L výraznejšie prevláda nad šírkou. V takomto prípade možno zanedbať zmenu teploty v priečnom smere a riešiť úlohu ako jednorozmernú v smere osi x . Prút je votknutý do steny s vysokou teplotou T_0 , je obtekaný chladiacim médiom o teplote T_∞ a má slúžiť na odvod tepla zo steny. Začiatok pre x sme zvolili čo do priebehu teploty trochu nenázorne na konci prúta, pretože v takomto prípade hľadaná funkcia $T(x)$ má jednoduchší tvar, ako v prípade voľby začiatku vo

voťknutí. Platí to potom aj pre aproximačnú funkciu využívanú pri jednotlivých numerických metódach. Materiál prúta má vodivosť λ a známy je aj súčiniteľ prestupu tepla medzi prútom a chladiacim médiom h . Šírka a hrúbka prúta je potrebná len na výpočet obvodu (perimetra) prúta p a tvar prierezu prúta pri tejto úlohe teda nie je významný.



Obr. 2 Obrázok pre analýzu tepelných a teplotných pomerov prúta (chladiaceho rebra)



Obr. 3 Tepelná bilancia diferenciálneho elementu prúta

Z prúta vo vzdialenosti x a $x+dx$ myslennými rezmi vyrežeme diferenciálny element (obr. 3) s dĺžkou dx . Tepelný tok vo vzdialenosti x označíme Q a budeme predpokladať, že do elementu vchádza (v bilančnej rovnici bude mať znamienko +). Tepelný tok, ktorý vo vzdialenosti $x+dx$ z elementu vychádza je $Q+(dQ/dx)dx$ (je to linearizácia funkcie Q v jej okolí pomocou dvojčlenného Taylorovho radu). Na ploche pdx ešte odchádza z elementu teplo $pdxh(T-T_\infty)$, kde T je teplota v mieste x a T_∞ je teplota okolitého média v dostatočne veľkej vzdialenosti od steny vyšetrovaného telesa. Potom bilančná rovnica je

$$Q - (Q + \frac{dQ}{dx} dx) - ph(T - T_\infty)dx = 0 \quad (18)$$

z ktorej dostávame

$$\frac{dQ}{dx} + ph(T - T_\infty) = 0 \quad (19)$$

Keď uplatníme vzťah medzi tepelným tokom Q a teplotným gradientom podľa Fourierovho zákona (1)

$$Q = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad (20)$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu platnú pre priebeh teploty po dĺžke prúta

$$\lambda S \frac{d^2}{dx^2} (T - T_\infty) - ph(T - T_\infty) = 0 \quad (21)$$

Zavedením funkcie prevyšujúcej teploty

$$\vartheta(x) = T(x) - T_\infty \quad \rightarrow \quad T(x) = T_\infty + \vartheta(x) \quad (22)$$

a zlúčením ostatných konštánt do μ^2 sa rovnica (21) zjednoduší na

$$\frac{d^2 \vartheta(x)}{dx^2} - \mu^2 \vartheta(x) = 0 \quad \text{kde} \quad \mu^2 = \frac{ph}{\lambda S} \quad (23)$$

s okrajovými podmienkami (zanedbávame odvod tepla konvekciou cez koncovú čelnú plochu prúta - malú v porovnaní s celkovou bočnou plochou - budeme túto plošku považovať za tepelne izolovanú)

$$\left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{a} \quad \vartheta|_{x=L} = T_0 - T_\infty \quad (24)$$

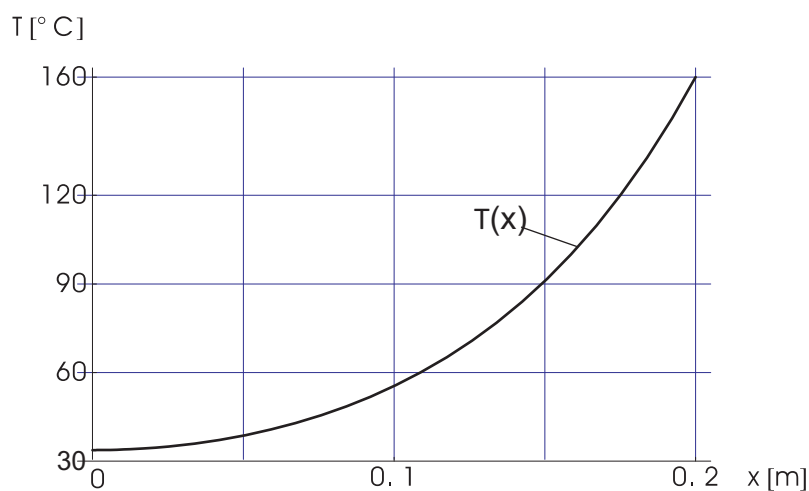
Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (23) je

$$\vartheta(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x} \quad (25)$$

ktoré sa po uplatnení okrajových podmienok (24), výpočte integračných konštánt a po prevode $\vartheta(x)$ na $T(x)$ podľa (22) zmení na

$$T(x) = T_\infty + \frac{T_0 - T_\infty}{e^{\mu L} + e^{-\mu L}} (e^{\mu x} + e^{-\mu x}) \quad (26)$$

Toto riešenie úlohy budeme považovať za exaktné a grafický priebeh teploty $T(x)$ po dĺžke prúta sme znázornili na obr. 3 pre tieto konkrétne hodnoty: $L = 20$ cm, $p = 10$ cm, $S = 5$ cm², $\lambda = 120$ W/(m°C), $h = 96$ W/(m² °C), $T_0 = 160$ °C, $T_\infty = 10$ °C. Z uvedených hodnôt dostaneme podľa (23) $\mu^2 = 160$ 1/m².



Obr. 3 Priebeh teploty po dĺžke prúta podľa exaktného riešenia (26)

Numerické metódy riešenia úloh vedenia tepla

Exaktné riešenie diferenciálnej rovnice vedenia tepla v telese možno získať len pre obmedzenú triedu jednoduchých úloh. Existuje však množstvo numerických metód, ktoré možno využiť na aproximatívne riešenie úlohy, pričom voľba metódy závisí od konkrétneho charakteru a zložitosti úlohy. My sa budeme venovať predovšetkým univerzálnej metóde konečných prvkov, ale v tejto časti na horeuvedenom jednoduchom príklade jednorozmerného vedenia tepla uplatníme aj riešenie inými metódami. Poslúži to na informáciu o základných numerických metódach (dajú sa, samozrejme, využívať aj pri riešení iných úloh), umožní to ich porovnanie a rozlíšenie a získa sa tým aj pohľad na miesto a zaradenie MKP v množine numerických metód.

Pokiaľ nerozdelíme vyšetřovaný interval na viacero úsekov, musíme si pri numerickom riešení jednorozmernej úlohy zvoliť globálnu aproximatívnu funkciu, spĺňajúcu predpísané globálne okrajové podmienky. Často sa takáto funkcia volí v tvare kombinácie tzv. *testovacích* funkcií $N_i(x)$

$$T(x) \approx \tilde{T}(x) = \tilde{T}(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i N_i(x) \quad (27)$$

s neznámymi koeficientami a_i , ktoré treba určiť pomocou zvolenej numerickej metódy. Testovacie funkcie musia byť spojité a diferencovateľné až po najvyšší stupeň derivácie obsiahnutej v diferenciálnej rovnici úlohy.

Pre numerické riešenie horeuvedeného jednorozmerného vedenia tepla zvolíme aproximačnú funkciu prevyšujúcej teploty s jediným neznámym koeficientom a_1 v tvare

$$\tilde{\vartheta}(x) = \tilde{T}(x) - T_\infty = a_0 + a_1 N_1(x) = (T_0 - T_\infty)[1 + a_1(x^2/L^2 - 1)] \quad (28)$$

ktorá je diferencovateľná až do druhého rádu a spĺňa okrajové podmienky (24).

Ritzova metóda

Ak aproximatívny návrh riešenia (28) dosadíme do diferenciálnej rovnice (23), rovnica vo všeobecnosti nebude splnená a dostaneme nenulový zvyšok (rezíduum)

$$R(x) = \frac{d^2 \tilde{\vartheta}(x)}{dx^2} - \mu^2 \tilde{\vartheta}(x) \neq 0 \quad (29)$$

Pri jednoduchšej Ritzovej metóde sa vyžaduje nulová integrálna hodnota zvyšku na intervale riešenia

$$\int_0^L \left(\frac{d^2 \tilde{\vartheta}(x)}{dx^2} - \mu^2 \tilde{\vartheta}(x) \right) dx = 0 \quad (30)$$

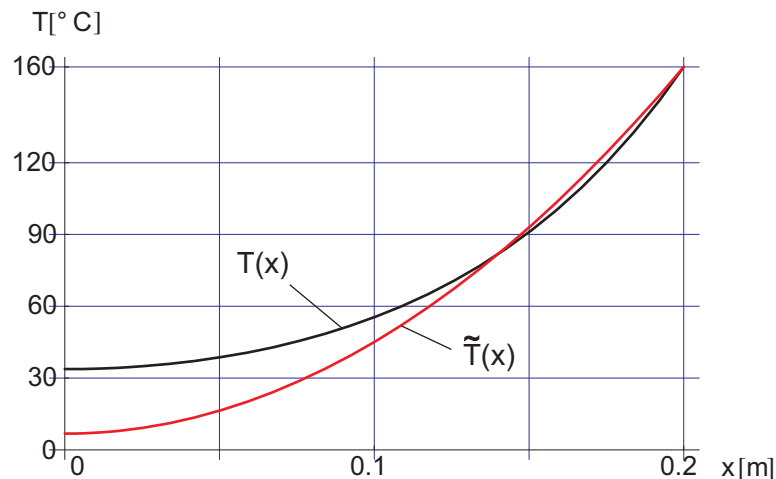
čím dostaneme rovnicu pre určenie koeficientu a_1 , a tým viac-menej úspešné spresnenie aproximatívneho riešenia. Po dosadení (28) do tohto integrálu, po integrácii a vyčíslení s konkrétnymi hodnotami príkladu dostaneme

$$a_1 = \frac{1,5\mu^2 L^2}{3 + \mu^2 L^2} = 1,0213 \quad (31)$$

a upravené približné riešenie (28) je

$$\tilde{T}(x) = T_\infty + \tilde{\vartheta}(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)[1 + 1,0213(x^2/L^2 - 1)] \quad (32)$$

čo sa málo líši od parabolického priebehu x^2/L^2 , ktorý by sme dostali pri $a_1 = 1$. Funkciu $\tilde{T}(x)$ sme v obr. 4 graficky porovnali s exaktným riešením.



Obr. 4 Priebeh teploty podľa exaktného riešenia (26) a približného riešenia Ritzovou metódou (32)

Variačná metóda (Rayleigh-Ritzova metóda)

V mnohých prípadoch možno riešenie diferenciálnej rovnice nahradiť ekvivalentnou variačnou úlohou nájdenia funkcie, ktorá minimalizuje špeciálny integrál (funkcionál, potenciál) zviazaný s danou diferenciálnou rovnicou. Variáciu funkcionálu diferenciálnej rovnice (23) možno vyjadriť vo forme Euler-Lagrangeovej rovnice

$$\delta I = \int_0^L \left(\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} - \mu^2 \vartheta \right) \delta \vartheta dx = 0 \quad (33)$$

kde δ je symbol variácie príslušnej funkcie alebo veličiny. Integrovaním prvého člena integrantu per partes sa zníži stupeň derivácie v rovnici a dostávame

$$\left[\frac{d\vartheta}{dx} \delta\vartheta \right]_0^L - \int_0^L \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right) \frac{d(\delta\vartheta)}{dx} dx - \mu^2 \int_0^L \vartheta \delta\vartheta dx = 0 \quad (34)$$

Rovnicu možno upraviť na

$$\left[\frac{d\vartheta}{dx} \delta\vartheta \right]_0^L - \frac{1}{2} \delta \int_0^L \left[\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)^2 + \mu^2 \vartheta^2 \right] dx = 0 \quad (35)$$

kde sa využili vzťahy z variačného počtu

$$\frac{d(\delta\vartheta)}{dx} = \delta \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right); \quad \frac{d\vartheta}{dx} \delta \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right) = \frac{1}{2} \delta \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)^2; \quad \vartheta \delta\vartheta = \frac{1}{2} \delta\vartheta^2$$

Z okrajových podmienok (24) vyplýva, že prvý člen v rovnici (35) je rovný nule, takže variačná formulácia nášho príkladu je

$$\delta I = \delta \int_0^L \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)^2 + \mu^2 \vartheta^2 \right] dx = 0 \quad (36)$$

Odmena za námahu spojenú s určením variačného integrálu

$$I = \int_0^L \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)^2 + \mu^2 \vartheta^2 \right] dx \quad (37)$$

spočíva v tom, že ak do neho dosadíme aproximačnú funkciu v tvare podľa (27)

$$\tilde{\vartheta}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i N_i(x) \quad (38)$$

a vykonáme integráciu, dostaneme funkciu s n neznámymi koeficientami a_i , ale zároveň aj n rovníc na ich určenie podľa zásad hľadania extrému funkcie viacerých premenných

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (39)$$

pričom so zvyšovaním počtu koeficientov aproximačná funkcia konverguje k exaktnému riešeniu.

Využime teraz túto metódu na približné riešenie nášho príkladu pričom aproximačná funkcia (28) má len jeden neznámy koeficient. Dosadíme ju do variačného integrálu (37)

$$I = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \frac{4(T_0 - T_\infty)^2 x^2}{L^4} a_1 + \mu^2 \left[T_0 - T_\infty + a_1(T_0 - T_\infty)(x^2 - 1) \right]^2 \right\} dx \quad (40)$$

Parciálnu deriváciu tohto vzťahu podľa a_1 postavíme rovnú nule, čo poskytne rovnicu pre určenie tohto koeficientu

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = \int_0^L \left\{ \frac{8a_1}{L^4} x^2 + 2\mu^2 \left[1 + a_1 \left(\frac{x^2}{L^2} - 1 \right) \right] \left(\frac{x^2}{L^2} - 1 \right) \right\} dx = 0 \quad (41)$$

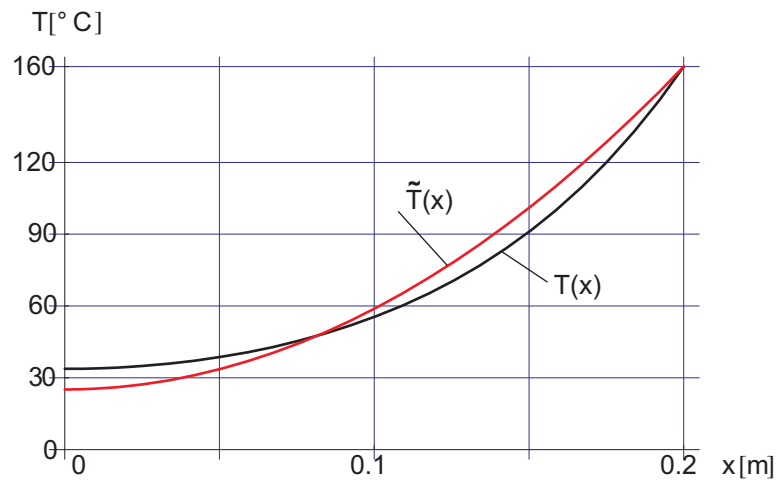
Po vyjadrení integrálu a dosadení konkrétnych hodnôt príkladu, pre koeficient a_1 platí

$$a_1 = \frac{5\mu^2 L^2}{10 + 4\mu^2 L^2} = \frac{5 \cdot 160 \cdot 0,04}{10 + 4 \cdot 160 \cdot 0,04} = 0,899 \quad (42)$$

Spresnené aproximatívne riešenie s týmto koeficientom podľa (28) je

$$\tilde{T}(x) = T_\infty + \tilde{\vartheta}(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)[1 + a_1(x^2 / L^2 - 1)] = 10 + 150[1 + 0.899(x^2 / 0.04 - 1)] \quad (43)$$

Funkciu $\tilde{T}(x)$ sme v obr. 5 graficky porovnali s exaktným riešením.



Obr. 5 Priebeh teploty po dĺžke prúta podľa exaktného (26) a variačného (43) riešenia

Variačná metóda poskytla kvalitnejšiu aproximáciu riešenia ako jednoduchá Ritzova metóda, navyše, v prípade zložitejšej úlohy, máme možnosť voliť aproximatívnu funkciu vyššieho stupňa s viacerými koeficientami. Sústavu rovníc na ich určenie potom zostavíme z podmienok minimalizácie variačného integrálu podľa (39).

Metódy vážených zvyškov

V metódach vážených zvyškov (reziduí) hľadáme konštanty vhodne zvolenej funkcie aproximatívneho riešenia diferenciálnej rovnice tak, aby zvyšok, t.j. výraz popisujúci mieru nesplnenia diferenciálnej rovnice, nadobúdal buď nulovú hodnotu vo vybraných bodoch, alebo aby bol nulový v zmysle priemerných hodnôt, alebo aby bol nejakým spôsobom minimalizovaný.

Nech problém, ktorý nie sme schopní exaktne riešiť, má všeobecný tvar

$$D(T(x)) + q(x) = 0 \quad (44)$$

kde D je lineárny diferenciálny operátor a q je udaná funkcia. Potom ak v tomto vzťahu uplatníme aproximačnú funkciu (27), rovnica nebude splnená a dostaneme nenulový zvyšok (rezíduum)

$$R(x) = D(\tilde{T}(x)) + q(x) \neq 0 \quad (45)$$

Cieľom metód vážených zvyškov je nútiť funkciu $R(x)$ blížiť sa k nule určitým sumačným (integrálnym) spriemerovacím spôsobom na celej (v našom prípade jednorozmernej) oblasti

$$\int_0^L R(x)w_i(x)dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (46)$$

kde počet tzv. *váhových funkcií* w_i sa rovná počtu neznámych koeficientov v aproximačnej funkcii $\tilde{T}(x)$ z jasného dôvodu - aby sme dostali potrebný počet rovníc na ich určenie. Jednotlivé metódy, z ktorých najznámejšie teraz stručne spomenieme, sa od seba líšia voľbou váhových funkcií v (46)

Kolokačná metóda

Jednoduchá metóda kolokácií (umiestnení) rovnomerne umiestňuje tzv. kolokačné body po oblasti riešenia a vyžaduje v nich nulovú hodnotu zvyšku. Váhové funkcie sa vyberajú z triedy Diracových δ funkcií s vlastnosťami

$$\begin{aligned} \delta(x - x_i) &= 1 & x &= x_i \\ \delta(x - x_i) &= 0 & x &\neq x_i \end{aligned}$$

čo po aplikácii v (46) vedie na sústavu rovníc

$$R(x_i) = 0 \quad (47)$$

Vyriešime teraz náš príklad touto metódou. Aproximačná funkcia (28)

$$\tilde{\vartheta}(x) = (T_0 - T_\infty) \left[1 + a_1 (x^2 / L^2 - 1) \right]$$

má len jeden neznámy koeficient, zvolíme teda len jeden kolokačný bod $x = L/2$ v strede prúta. Na určenie a_1 podľa (47) a (29) zostavíme rovnicu

$$\left[\frac{d^2 \tilde{\vartheta}(x)}{dx^2} - \mu^2 \tilde{\vartheta}(x) \right]_{x=L/2} = 0 \quad (48)$$

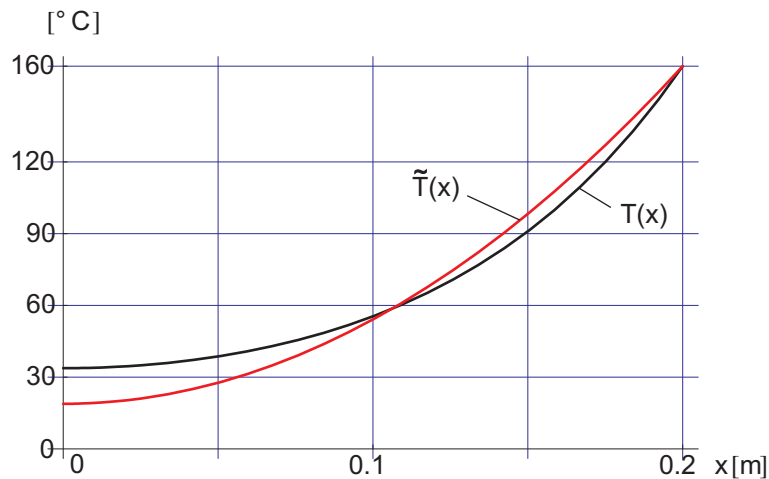
z ktorej po dosadení a jednoduchom riešení dostávame

$$a_1 = \frac{4\mu^2 L^2}{8 + 3\mu^2 L^2} = \frac{4 \cdot 160 \cdot 0,04}{8 + 3 \cdot 160 \cdot 0,04} = 0,941 \quad (49)$$

Spresnené aproximatívne riešenie s týmto koeficientom podľa (28) je

$$\tilde{T}(x) = T_\infty + \tilde{\vartheta}(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) [1 + a_1 (x^2 / L^2 - 1)] = 10 + 150 [1 + 0.941 (x^2 / 0.04 - 1)] \quad (50)$$

Funkciu $\tilde{T}(x)$ sme v obr. 6 graficky porovnali s exaktným riešením.



Obr. 6 Priebeh teploty po dĺžke prúta podľa exaktného (26) a kolokačného (50) riešenia

Metóda najmenších štvorcov

Pri tejto metóde sa vychádza zo spojitej funkcie vytvorenej integrálnou sumáciou kvadrátov zvyšku na oblasti riešenia

$$S(x) = \int_0^L R^2(x) dx$$

Minimum tejto skalárnej funkcie sa hľadá tak, že sa jej derivácie podľa všetkých neznámych koeficientov aproximačnej funkcie postavia rovné nule, čím dostaneme rovnice na ich výpočet

$$\int_0^L R(x) \frac{\partial R}{\partial a_i} dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (51)$$

Porovnaním so (46) vidieť, vidieť, že váhovými funkciami sú výrazy

$$w_i = \frac{\partial R}{\partial a_i}$$

Vyriešime teraz náš príklad touto metódou. Aproximačná funkcia (28)

$$\tilde{\vartheta}(x) = (T_0 - T_\infty) \left[1 + a_1 (x^2 / L^2 - 1) \right]$$

má len jeden neznámy koeficient a_1 . Na jeho určenie podľa (51) a (29) zostavíme rovnicu čo vedie na

$$\int_0^L \left\{ \left[2a_1 - \mu^2 (L^2 + a_1 x^2 - a_1 L^2) \right] (2 - \mu^2 x^2 + \mu^2 L^2) \right\} dx = 0$$

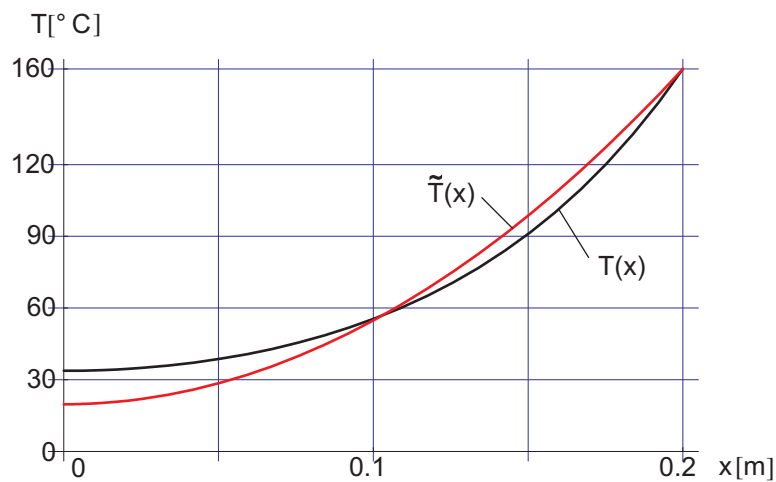
s výsledkom

$$a_1 = \frac{2\mu^2 L^2 + \frac{2}{3}\mu^4 L^4}{4 + \frac{8}{3}\mu^2 L^2 + \frac{8}{15}\mu^4 L^4} = 0,935 \quad (52)$$

Spresnené aproximatívne riešenie s týmto koeficientom podľa (28) je

$$\tilde{T}(x) = T_\infty + \tilde{\vartheta}(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \left[1 + a_1 (x^2 / L^2 - 1) \right] = 10 + 150 \left[1 + 0.935 (x^2 / 0.04 - 1) \right] \quad (53)$$

Funkciu $\tilde{T}(x)$ sme v obr. 7 graficky porovnali s exaktným riešením.



Obr. 7 Priebeh teploty podľa exaktného riešenia (26) a riešenia metódou najmenších štvorcov (53)

Galerkinova metóda

Galerkinovu metódu možno stručne uviesť ako špeciálny prípad metódy najmenších štvorcov, kedy ale v minimalizačnej rovnici (51) váhovými funkciami sú testovacie funkcie $N_i(x)$ aproximačnej funkcie (27). Koeficienty aproximačného riešenia sa potom podľa (51) určujú zo sústavy rovníc

$$\int_0^L R(x) N_i(x) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (54)$$

Vyriešime teraz náš príklad touto metódou. Aproximačná funkcia (28)

$$\tilde{\vartheta}(x) = (T_0 - T_\infty) \left[1 + a_1 (x^2 / L^2 - 1) \right]$$

má len jeden neznámy koeficient a_1 . Na jeho určenie podľa (54) a (29) zostavíme rovnicu s kvadratickou váhovou funkciou

$$N_1(x) = 1 - x^2 / L^2$$

a dostávame

$$\int_0^L \left[\frac{d^2 \tilde{\vartheta}(x)}{dx^2} - \mu^2 \tilde{\vartheta}(x) \right] \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) dx = 0 \quad (55)$$

Koeficient po vyjadrení a vyčíslení je

$$a_1 = \frac{5\mu^2 L^2}{10 + 4\mu^2 L^2} = 0,899 \quad (56)$$

Spresnené aproximatívne riešenie s týmto koeficientom podľa (28) je

$$\tilde{T}(x) = T_\infty + \tilde{\vartheta}(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)[1 + a_1(x^2 / L^2 - 1)] = 10 + 150[1 + 0.899(x^2 / 0.04 - 1)] \quad (57)$$

Toto riešenie je totožné s riešením, ktoré sme dostali pri aplikácii variačnej metódy (43) a grafické porovnanie s exaktným riešením je také isté, ako udáva obr. 5. Je možné dokázať, že variačná a Galerkinova metóda dávajú rovnaký výsledok za predpokladu, že pre danú úlohu možno zostaviť klasický variačný funkcionál.

Z hľadiska metódy konečných prvkov je Galerkinova metóda zaujímavá tým, že pri jej aplikácii nie na celú oblasť (teleso) ale na individuálnu podoblasť (prvok) poskytuje nástroj na formuláciu matíc konečného prvku. V takom prípade zistíme, že funkcie N_i sú vlastne interpolačné (aproximačné, tvarové) funkcie prvku N_i^e definované na oblasti prvku [1] a koeficienty a_i sú neznáme prvkové uzlové hodnoty úlohy (teploty uzlov prvku, zovšeobecnené uzlové posunutia atď.).

Silné a slabé riešenie úlohy okrajových hodnôt

Príklad, ktorým sme sa zaoberali v predchádzajúcich častiach, môžeme považovať za jednoduchú úlohu okrajových hodnôt definovanú diferenciálnou rovnicou

$$\frac{d^2 \vartheta(x)}{dx^2} - \mu^2 \vartheta(x) = 0 \quad x \in [0, L] \quad (58)$$

a okrajovými podmienkami

$$\left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{a} \quad \vartheta|_{x=L} = T_0 - T_\infty \quad (59)$$

Klasické, "silné" riešenie tejto úlohy je funkcia $\vartheta(x)$, pre ktorú platí

1. $\vartheta(x)$ má dve spojité derivácie na intervale $[0, L]$
2. $\left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} = 0$, $\vartheta(0) = T_0 - T_\infty$
3. $\frac{d^2 \vartheta(x)}{dx^2} - \mu^2 \vartheta(x) = 0$, pre každé x v intervale $[0, L]$

Existuje veľa funkcií, ktoré spĺňajú kritériá 1 a 2, ale len jedna funkcia (t.j. exaktné riešenie diferenciálnej rovnice), ktorá spĺňa kritérium č. 3.

Ak rovnicu (58) vynásobíme spojitou funkciou $v(x)$, pre ktorú tiež platia okrajové podmienky (59), a vyjadríme určitý integrál tohto súčinu na intervale $[0, L]$, rovnosť sa nenaruší a platí

$$\int_0^L \left(\frac{d^2 \vartheta(x)}{dx^2} - \mu^2 \vartheta(x) \right) v(x) dx = 0 \quad (60)$$

pri nezmenených okrajových podmienkach (59). Definovali sme takto slabú (integrálnu) formu našej okrajovej úlohy a pre slabé riešenie $\vartheta(x)$ platí

1. $\vartheta(x)$ má dve spojité derivácie na intervale $[0, L]$
2. $\left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} = 0$, $\vartheta(0) = T_0 - T_\infty$
- 3a. $\int_0^L \left(\frac{d^2 \vartheta(x)}{dx^2} - \mu^2 \vartheta(x) \right) v(x) dx = 0$, pre každú spojitú funkciu $v(x)$ spĺňajúcu okrajové podmienky

Rovnica (60) predstavuje alternatívnu, integrálnu, slabú formu diferenciálnej rovnice (59). Je to z hľadiska využitia na riešenie úlohy okrajových hodnôt prinajmenšom rovnocenná náhrada, pretože platí:

- Ak existuje silné riešenie existuje aj slabé riešenie
- Ak existujú obe riešenia, tak sú identické
- Slabá formulácia prevádza vzťah definovaný diferenciálnou rovnicou na integrálny vzťah a požaduje jeho splnenie v určitom funkcionálnom zmysle, čím *zoslabuje* požiadavky na hladkosť hľadaného riešenia. Poskytuje možnosť riešenia širšej triedy úloh a je vhodnejšia na využitie pri približných numerických metódach

Slabú formu diferenciálnej rovnice môžeme zapísať aj v tvare

$$\int_0^L R(x) v(x) dx = 0 \quad (61)$$

kde $R(x)$ je reziduálna funkcia, (stretli sme sa už s ňou pri horeuvedených približných riešeniach), ktorá sa rovná nule, ak $v(x)$ je exaktné riešenie diferenciálnej rovnice úlohy.

Slabá formulácia v tvare (60) má nevýhodu v tom, že vyžaduje druhú deriváciu hľadanej funkcie $v(x)$ a len jednoduchú spojitosť testovacích funkcií $v(x)$. Obyčajne sa preto využíva "vyrovnanejšia" forma, ktorá integrovaním per partes podľa vzťahu

$$\int f''(x)v(x)dx = f'(x)v(x) - \int f'(x)v'(x)dx \quad (62)$$

zniži rád derivácie funkcie $v(x)$ v člene integrandu $f(x)$, ktorý ju obsahuje, na úkor jeho zvýšenia pre funkcie $v(x)$.

Pre náš príklad upravená slabá forma bude

$$\int_0^L R(x)v(x)dx = \int_0^L \frac{d^2 v(x)}{dx^2} v(x)dx - \mu^2 \int_0^L v(x) v(x)dx = \frac{dv(x)}{dx} v(x) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{dv(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx - \mu^2 \int_0^L v(x) v(x)dx = 0 \quad (63)$$

Dostávame takto ekvivalentnú náhradu slabej formy (60), ktorá s $v(x) = N_1(x)$ podľa (54) dáva to isté približné riešenie ako (58).

Pod vhodnejším tvarom slabej formy diferenciálnej rovnice sa myslí, ako sme už spomenuli, predovšetkým vhodnejší tvar na približné numerické riešenie, ktoré v ďalšej časti zrealizujeme pomocou MKP s využitím Galerkinovej metódy na určenie základných vzťahov (matic) úlohy.

Riešenie jednorozmernej úlohy pomocou MKP

Metóda konečných prvkov patrí do kategórie metód, o ktorých sme hovorili v predchádzajúcich častiach. Možno ju označiť za univerzálnu metódu približného riešenia obyčajných a parciálnych diferenciálnych rovníc, s ktorými sa stretávame pri formulácii úloh začiatkových a okrajových hodnôt v jednotlivých oblastiach fyziky a mechaniky kontinua.

Charakterizuje ju predovšetkým to, že MKP globálnu oblasť úlohy mení na súhrn jednoduchých podoblastí, nazývaných konečné prvky, a že na každej podoblasti sa približné riešenie rovníc hľadá vo forme polynómov. Prvá vlastnosť (rozdelenie celku na jednoduché časti) umožňuje riešiť geometricky zložité oblasti s lokálnymi nespojitostami a zložitými okrajovými podmienkami. Na vyššie uvedených príkladoch sme videli, že metódy vážených zvyškov i ostatné variačné metódy vedú na určitý integrál funkcie zvyšku na oblasti riešenia úlohy, ktorý pri komplikovanejšej globálnej oblasti je veľmi zložitý alebo neriešiteľný. Zavedenie konečných prvkov umožňuje vyjadriť variačný integrál ako súčet jednoduchých integrálov na týchto podoblastiach.

Polynomicke funkcie na podoblasti zase prinášajú jednoduchosť do formulácie lokálnych integrálov a po jednoduchej úprave predstavujú na konečnom prvku fyzikálne názorné interpolačné (aproximačné, tvarové) funkcie, ktoré interpolujú číselné hodnoty riešenia (primárne neznáme) na určitom počte vybraných bodov (uzlov) prvku. Medzi susediacimi prvkami treba zaručiť podmienky spojitosti, aby bola zaručená spojitosť globálneho riešenia.

K výpočtovému modelu MKP, ktorý predstavuje sústava rovníc na určenie neznámych číselných parametrov, sa môžeme dopracovať viacerými postupmi, pričom sa zohľadňuje ich vhodnosť pre daný typ úlohy. Často sa využíva variačná Rayleigh-Ritzova metóda, princíp minima celkovej potenciálnej energie telesa, princíp virtuálnej práce, resp. virtuálnych posunutí a metódy vážených zvyškov (pozri napr. [1],[2], D7). Teda MKP patrí do kategórie metód, pri ktorej sa približné polynomicke riešenie jednorozmernej úlohy

$$\tilde{\vartheta}(x) = \sum_{i=1}^n a_i N_i(x) \quad (64)$$

na každom elemente vyjadruje z integrálneho funkcionálu zviazaného s diferenciálnou rovnicou úlohy. Tiež treba spomenúť fakt, že vo všeobecnosti metóda vedie na veľký počet prvkov, uzlov a veľkú sústavu rovníc. Pracuje sa teda s veľkým počtom vzťahov a čísel a preto nielen na globálnej úrovni, ale aj na prvku, sa využíva maticový zápis. Pretože konečné prvky konkrétnej fyzikálnej úlohy sú formálne rovnaké (líšia sa len číselnými parametrami), býva zvykom prvkové vzťahy a matice vyjadrovať na všeobecnom (e-tom) prvku, ktoré potom platia pre každý prvok výpočtového modelu.

Ukážme si teraz riešenie jednorozmernej úlohy vedenia tepla pomocou MKP, pričom využijme Galerkinovu metódu. Nie je to najjednoduchší postup (jednoduchšie je vychádzať zo známeho variačného integrálu, ktorý pre vedenie tepla je k dispozícii), ale má výhodu, že súvisle ukazuje postup formulácie úlohy od diferenciálnej rovnice až po výslednú sústavu rovníc pre určenie neznámych koeficientov približného riešenia.

Budeme riešiť ten istý príklad, ktorý sme v predchádzajúcich častiach riešili pomocou rôznych iných približných metód: Pre prút o dĺžke L na obr.2 treba pri ustálenom vedení tepla určiť priebeh teploty

$$T(x) = T_\infty + \vartheta(x) \quad (65)$$

keď pre funkciou prevyšujúcej teploty $\vartheta(x)$ platí diferenciálna rovnica (23) so znamienkovou úpravou (kvôli príjemnejším znamienkam po použití integrovania per partes v slabej forme) a s dosadením za μ^2 podľa (23), aby sa nám pri Galerkinovej metóde nestrácal fyzikálny význam jednotlivých členov

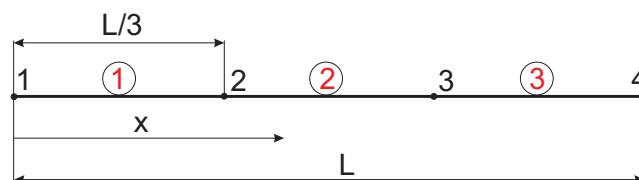
$$-\lambda S \frac{d^2 \vartheta(x)}{dx^2} + ph \vartheta(x) = 0 \quad (66)$$

Okrajové podmienky, platia pre exaktné i približné riešenie

$$\left. \frac{d\vartheta(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{a} \quad \vartheta(x)|_{x=L} = T_0 - T_\infty \quad (67)$$

Konkrétne vstupné hodnoty príkladu sú: $L = 20 \text{ cm}$, $p = 10 \text{ cm}$, $S = 5 \text{ cm}^2$, $\lambda = 120 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$, $h = 96 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ }^\circ\text{C})$, $T_0 = 160 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_\infty = 10 \text{ }^\circ\text{C}$. Z uvedených hodnôt dostaneme podľa (23) $\mu^2 = 160 \text{ 1}/\text{m}^2$.

V ďalšom budeme približné riešenie kvôli jednoduchšiemu zápisu označovať $\vartheta(x)$; k zámene s exaktným riešením nemôže dôjsť, pretože ďalej sa už budeme zaoberať len približným riešením uvedenej úlohy.



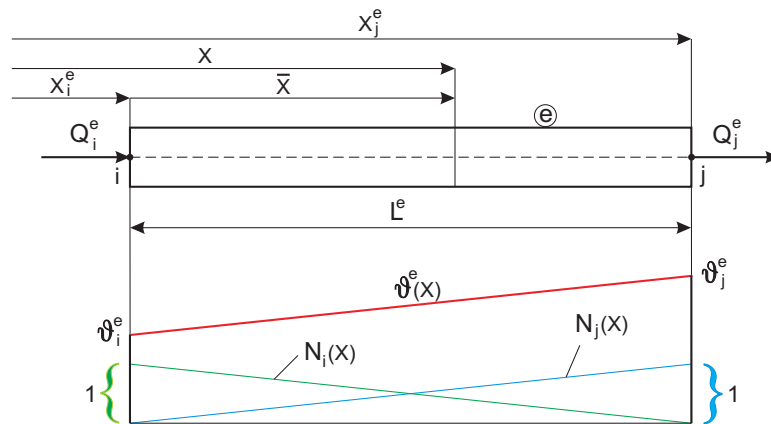
Obr.8 Rozdelenie prúta na prvky s globálnym číslovaním uzlov

Prvým krokom riešenia je diskretizácia prúta na konečné prvky a vyznačenie uzlových bodov. Ide nám predovšetkým o metodiku a preto zvolíme hrubé delenie len na tri prvky so štyrmi koncovými uzlami (obr. 8). Ľubovoľný, e-ty prvok potom bude mať dva *lokálne* označené uzly a všeobecné parametre podľa obr.9.

Zvoľme podľa (64) približné riešenie na e-tom prvku s dvomi neznámymi koeficientami v tvare

$$\vartheta^e(x) = a_1 N_i(x) + a_2 N_j(x) \quad (68)$$

Pri funkciách $N(x)$ v tomto vzťahu je užitočné sa zastaviť a urobiť malú analýzu. Galerkinova metóda ich používa ako váhové funkcie $w(x)$, ktoré integrálnym spôsobom vyžadujú na každom elemente nulovú hodnotu ich súčiny so zvyškom podľa (54) a tiež aj ako testovacie funkcie $N(x)$, ktoré po určení neznámych koeficientov α_i tvoria na každom prvku funkciu (68) približného riešenia. Pravda, testovacie funkcie musia byť zvolené, známe funkcie a preto si teraz ukážeme jednu z možností ich určenia.



Obr.9 Všeobecný, ľubovoľný, e-ty prvok s lokálnymi číslami uzlov a jeho interpolačné funkcie

Predpokladajme, že v uzlových bodoch všeobecného e-teho prvku prúta na obr. 9 s lokálnym číslovaním uzlov poznáme hodnoty funkcie $\vartheta(x)$, t.j. ϑ_i^e a ϑ_j^e , a vyžadujeme jej lineárny priebeh po prvku

$$\vartheta^e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (69)$$

Známe hodnoty v uzloch nám po dosadení poskytnú dve rovnice pre určenie koeficientov α_1 a α_2

$$\begin{aligned} \vartheta_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 \\ \vartheta_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 \end{aligned}$$

Po vypočítaní koeficientov α a dosadení do (69) dostaneme

$$\vartheta^e(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \vartheta_i^e + \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \vartheta_j^e = N_i(x) \vartheta_i^e + N_j(x) \vartheta_j^e = \begin{bmatrix} N_i(x) & N_j(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_i^e \\ \vartheta_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e \boldsymbol{\theta}^e \quad (70)$$

kde funkcie

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} = \frac{x_j - x}{L_e} \quad N_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_i}{L_e} \quad (71)$$

sú hľadané lineárne interpolačné (testovacie, bázové, aproximačné, tvarové) funkcie prvku. Slúžia na interpoláciu (v tomto prípade lineárnu) uzlových hodnôt primárnej neznámej do celej oblasti prvku. Vo svojom uzle majú hodnotu rovnú jednej, v ostatných uzloch nulovú. Sú to vlastne iným, ale fyzikálne omnoho názornejším, spôsobom zapísané lineárne testovacie funkcie (68). Na obr. 9 je graficky znázornený spôsob ako tieto funkcie podľa vzťahu (70) interpolujú uzlové hodnoty na celú dĺžku prvku. (Stručný výťah z bohatej teórie interpolačných funkcií konečných prvkov možno nájsť napr. v [1]).

Derivácie funkcií (70) a (71) budeme tiež potrebovať

$$\frac{d\vartheta^e}{dx} = \frac{dN_i}{dx} \vartheta_i^e + \frac{dN_j}{dx} \vartheta_j^e \quad \frac{dN_i}{dx} = -\frac{x}{L_e} \quad \frac{dN_j}{dx} = \frac{x}{L_e} \quad (72)$$

Aplikujme teraz Galerkinovu metódu na e-ty prvok. Ak dosadíme lineárny tvar približného riešenia na tomto prvku (70) do diferenciálnej rovnice (66), rovnica nebude splnená a nenulový zvyšok je

$$R^e(x, \vartheta_i, \vartheta_j) = -\lambda S \frac{d^2 \vartheta^e(x, \vartheta_i, \vartheta_j)}{dx^2} + ph \vartheta^e(x, \vartheta_i, \vartheta_j)$$

Galerkinova metóda vyžaduje, aby pre testovacie funkcie platilo

$$\int_{x_i}^{x_j} R^e(x, \vartheta_i, \vartheta_j) N_i(x) dx = 0 \quad \int_{x_i}^{x_j} R^e(x, \vartheta_i, \vartheta_j) N_j(x) dx = 0$$

čím sme definovali dve rovnice na určenie uzlových hodnôt ϑ_i a ϑ_j . Dosadíme do nich zvyšok

$$\int_{x_i}^{x_j} \left(-\lambda S \frac{d^2 \vartheta^e}{dx^2} + ph \vartheta^e \right) N_i dx = 0 \quad \int_{x_i}^{x_j} \left(-\lambda S \frac{d^2 \vartheta^e}{dx^2} + ph \vartheta^e \right) N_j dx = 0$$

Prvé členy integrantov upravíme integrovaním per partes na vhodnejší tvar

$$\int_{x_i}^{x_j} \left(-\lambda S \frac{dN_i}{dx} \frac{d\vartheta^e}{dx} + ph N_i \vartheta^e \right) dx - \left[N_i \lambda S \frac{d\vartheta^e}{dx} \right]_{x_i}^{x_j} = 0$$

$$\int_{x_i}^{x_j} \left(-\lambda S \frac{dN_j}{dx} \frac{d\vartheta^e}{dx} + ph N_j \vartheta^e \right) dx - \left[N_j \lambda S \frac{d\vartheta^e}{dx} \right]_{x_i}^{x_j} = 0$$

Členy mimo integrálu sú ľahko identifikovateľné ako Neumanove okrajové podmienky pre sekundárnu premennú, ktorá v tomto prípade predstavuje tepelný tok. V krajných bodoch intervalu nadobúdajú funkcie N_i a N_j hodnoty 1 (vo svojom uzlovom bode) alebo 0 (v inom uzlovom bode), takže dostávame

$$\left[N_i \lambda S \frac{d\vartheta^e}{dx} \right]_{x_i}^{x_j} = -\lambda S \frac{d\vartheta^e}{dx} \Big|_{x=x_i} = Q_i \quad (73)$$

$$\left[N_j \lambda S \frac{d\vartheta^e}{dx} \right]_{x_i}^{x_j} = \lambda S \frac{d\vartheta^e}{dx} \Big|_{x=x_j} = Q_j \quad (74)$$

Opačné znamienka signalizujú v uzle i vstup a v uzle j výstup tepla z prvku. Dosadením (73) a (74) do predchádzajúcich rovníc sa tieto upravujú na

$$\int_{x_i}^{x_j} \left(-\lambda S \frac{dN_i}{dx} \frac{d\vartheta^e}{dx} + ph N_i \vartheta^e \right) dx = Q_i \quad (75)$$

$$\int_{x_i}^{x_j} \left(-\lambda S \frac{dN_j}{dx} \frac{d\vartheta^e}{dx} + ph N_j \vartheta^e \right) dx = Q_j \quad (76)$$

Po dosadení funkcií do integrantov týchto rovníc a integrácii dostaneme jednoduché vzťahy pre určovanie hodnôt primárnej neznámej v uzlových bodoch e-teho prvku, ktoré zapíšeme v maticovom tvare

$$\left(\frac{\lambda S}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{ph L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \vartheta_i^e \\ \vartheta_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i^e \\ Q_j^e \end{bmatrix} \quad (77)$$

v stručnom zápise

$$\mathbf{K}^e \vartheta^e = \mathbf{q}^e \quad (78)$$

kde \mathbf{K}^e je (symetrická) matica tepelnej vodivosti prvku, ϑ^e je vektor uzlových teplôt prvku a \mathbf{q}^e je vektor vnútorných uzlových "zaťaženií" prvku (na uzle môže existovať aj vonkajší zdroj tepelného toku).

Poznamenávame, že vyjadrenie rovníc (77) je jednoduchšie pri použití lokálnej nezávislej premennej \bar{x} (obr.9). Vtedy tvarové funkcie a ich derivácie sú

$$N_i = 1 - \frac{\bar{x}}{L_e} \quad N_j = \frac{\bar{x}}{L_e} \quad \frac{dN_i}{d\bar{x}} = -\frac{1}{L_e} \quad \frac{dN_j}{d\bar{x}} = \frac{1}{L_e} \quad (79)$$

a integrály (75) a (76) sa vyjadrujú v hraniciach 0 a L_e .

Po vyčíslení konštánt v (77), ktoré sú pre všetky prvky rovnaké, a sčítaní matic dostaneme pre všeobecný prvok prúta

$$\mathbf{K}^e \boldsymbol{\vartheta}^e = \begin{bmatrix} 1,113 & -0,793 \\ -0,793 & 1,113 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_i^e \\ \vartheta_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i^e \\ Q_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{q}^e \quad (80)$$

Skladanie prvkových matic do globálnej sústavy rovníc pre model prúta na obr.8 uskutočníme klasickým postupom pomocou súčtu rozšírených matic prvkov [1].

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\vartheta} = \begin{bmatrix} 1,113 & -0,793 & 0 & 0 \\ -0,793 & 2,226 & -0,793 & 0 \\ 0 & -0,793 & 2,226 & -0,793 \\ 0 & 0 & -0,793 & 1,113 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \mathbf{q} \quad (81)$$

Z okrajových podmienok vyplýva, že $Q_1 = 0$ a $\vartheta_4 = T_4 - T_\infty = 160 - 10 = 150$ °C. Q_2 a Q_3 sa tiež rovnajú nule, pretože pri spojení prvkov majú vnútorné uzlové tepelné toky v stýkajúcich sa uzloch prvkov rovnakú veľkosť a opačné znamienka. Takže z prvých troch rovníc sme určili uzlové prevyšujúce teploty

$$\begin{bmatrix} 1,113 & -0,793 & 0 \\ -0,793 & 2,226 & -0,793 \\ 0 & -0,793 & 2,226 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,793 \cdot 150 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \vartheta_1 = 21,9 \\ \vartheta_2 = 30,7 \\ \vartheta_3 = 64,4 \end{matrix} \quad (82)$$

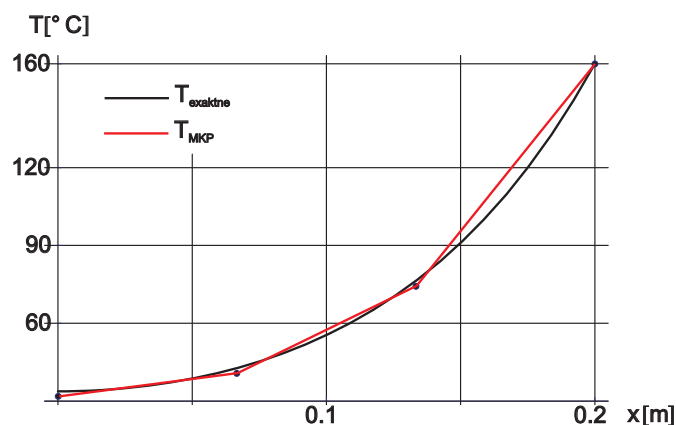
a z poslednej v (81), keď už poznáme $\vartheta_3 = 64,4$ °C, možno určiť neznámy uzlový tok Q_4 (t.j. množstvo tepla prúdiaceho zo steny do chladiaceho rebra)

$$Q_4 = 1,113 \cdot 150 - 0,793 \cdot 64,4 = 115,9 \text{ W} \quad (83)$$

Pre porovnanie uvedieme celkový tok tepla z exaktného riešenia diferenciálnej rovnice

$$\begin{aligned} |Q| &= \lambda S \left. \frac{d\vartheta(x)}{dx} \right|_{x=L} = \lambda S \left. \frac{d}{dx} \left[\frac{T_0 - T_\infty}{e^{\mu L} + e^{-\mu L}} (e^{\mu x} + e^{-\mu x}) \right] \right|_{x=L} \\ &= \mu \lambda S \frac{T_0 - T_\infty}{e^{\mu L} + e^{-\mu L}} (e^{\mu L} + e^{-\mu L}) = 112,4 \text{ W} \end{aligned} \quad (84)$$

Hľadané uzlové teploty chladiaceho rebra podľa (65) sú vyššie o teplotu chladiaceho média $T_\infty = 10$ °C, takže podľa (82) dostávame $T_1 = 31,9$ °C, $T_2 = 40,7$ °C, $T_3 = 74,4$ °C a teplota $T_4 = 160$ °C je udaná okrajová podmienka. Lineárnu interpoláciu týchto hodnôt spolu s exaktným priebehom teploty sme graficky porovnali v obr.10. Zvyšovaním počtu prvkov výsledky konvergujú k exaktným hodnotám. Napr. exaktná hodnota teploty na izolovanom konci prúta ($x = 0$) podľa (26) je 33,7 °C a uvedený postup s 10 prvkami dáva $T_1 = 33,6$ °C.



Obr.10 Porovnanie exaktného priebehu teploty a riešenia pomocou MKP s tromi prvkami a lineárnymi interpolačnými funkciami

Riešenie príkladu pomocou programu ANSYS

Pomocou programu ANSYS možno riešiť príklad, s ktorým sme sa zoberali v predchádzajúcich častiach, rôznymi spôsobmi. Najjednoduchšie pomocou termálneho škrupinového prvku (Shell 57) alebo pomocou termálneho objemového šesťstenového 3D prvku (Solid 70). Vymodeluje sa tvar prúta s konštantami pre vedenie tepla a na príslušné plochy sa predpíšu potrebné hodnoty pre odvod tepla konvekciou.

Pretože sa zaoberáme jednorozmernou úlohou využijeme jednorozmerné termálne konečné prvky Link 32 a Link 34. Prvok Link 32 je dvojuzlový prvok určený na jednorozmerné vedenie tepla (vedie teplo len v smere svojej osi) s lineárnymi izoparametrickými interpolačnými funkciami. Koncový bod modelu zloženého z takýchto prvkov, pokiaľ nemá predpísanú okrajovú podmienku, je implicitne tepelne izolovaný.

Na odvod alebo prívod tepla konvekciou pri známom koeficiente h možno využiť termálny dvojuzlový prvok Link 34, ktorý sa pripája do uzlov modelu zloženého z kondukčných prvkov. Jeho priečna plocha udáva plochu modelu v okolí prípojného uzla, na ktorej sa uskutočňuje konvekcia. Celková suma plôch týchto prvkov sa rovná celkovej konvekčnej ploche modelu; dĺžka prvku je ľubovoľná (môže byť i nulová). Vo voľných koncových bodoch týchto prvkov sa predpíše teplota okolitého média T_{∞} .

Príklad sme v Ansyse riešili v interaktívnom móde pomocou týchto príkazov:

1. Názov úlohy

Utility Menu>File>Change Jobname, /FILENAM = TermoPrut, OK;

2. Zobrazovať príkazy len pre termálnu úlohu

Ansys Main Menu>Preferences>Thermal, OK;

3. Potrebné typy prvkov

*Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete>Add, Link, 2D conduction 32, Apply,
3D convection 34, OK, Close;*

4. Prierezové konštanty pre prvky. Zadáme tri skupiny: 1 - pre prvok Link 32 (jeho prierez), 2 - pre krajné prvky Link 34 (odvádzajú teplo z polovičnej povrchovej plochy kondukčného prvku Link 32), 3 - pre ostatné konvekčné prvky (odvádzajú teplo z celej povrchovej plochy kondukčného prvku)

*Real Constants> Add/Edit/Delete>Add, Type 1 Link 32, OK, AREA = 0.0005, OK,
Add, Type 2 Link 34, OK, AREA = 0.2/6*0.1, OK,
Add, Type 2 Link 34, OK, AREA = 0.2/3*0.1, OK, Close;*

5. Materiálové konštanty. Zadáme len jednu skupinu s λ a h . V kondukčných prvkoch sa uplatní len λ a v konvekčných len h .

*Material Props>Material Models>Material Model Number 1>Thermal>Conductivity>Isotropic, KXX = 120, OK,
Convection or Film Coeff., HF = 96, OK, Material, Exit;*

6. Tvorba uzlových bodov

*Modeling>Create>Nodes>In Active CS, X = 0, Y = 0, Apply
X = 0, Y = 0.05, OK,
Modeling>Copy>Nodes>Copy>Pick All, Itime = 4, DX = 0.2/3, OK;*



7. Tvorba prvkov

(Implicitne sú nastavené vlastnosti kondukčných prvkov - TYPE = 1)

Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes, Kliknúť uzly 1,3, Apply, 3,5, Apply, 5,7, OK;

Elem Attributes, TYPE = 2 Link 34, REAL = 2, OK,

Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes, Kliknúť uzly 1,2, Apply, 7,8, OK;

Elem Attributes, TYPE = 2 Link 34, REAL = 3, OK,

Modeling>Create>Elements>Auto Numbered>Thru Nodes, Kliknúť uzly 3,4, Apply, 5,6, OK;

8. Okrajové podmienky

Ansysis Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Thermal>Temperature>On Nodes, Kliknite uzol 7, OK, TEMP, Value = 160, Apply, Kliknite uzly 2,4,6,8, OK, TEMP, Value = 10, OK;

9. Výpočet ustáleného stavu vedenia tepla v prúte

Solve>Current LS, OK; (Ignorujte príp. upozornenie, že sa nenastavili časové kroky pre nestacionárne prvky.)

10. Výpis teplôt v uzloch

Ansysis Main Menu>General Postproc>List Results>Nodal solution>DOF Solution>Nodal Temperature, OK;

NODE	TEMP
1	35.437
3	44.482
5	78.047
7	160.00

10. Tepelný tok zo steny do prúta

List Results>Element Solution>Heat Flow, Heat Flow, OK;

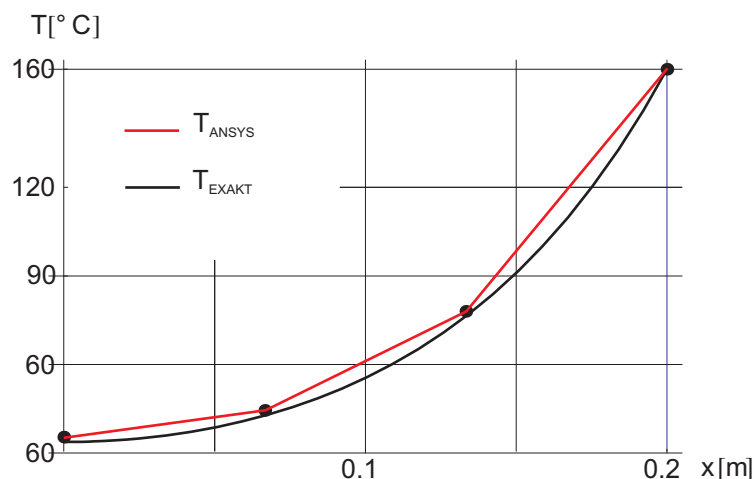
ELEM=		HEAT
5	73.758	
7	-73.758	

ELEM=		HEAT
7	-48.000	
8	48.000	

11. Ukončenie výpočtu a uloženie databázy úlohy

Ansysis Toolbar>Quit, Save Geom+Loads, OK;

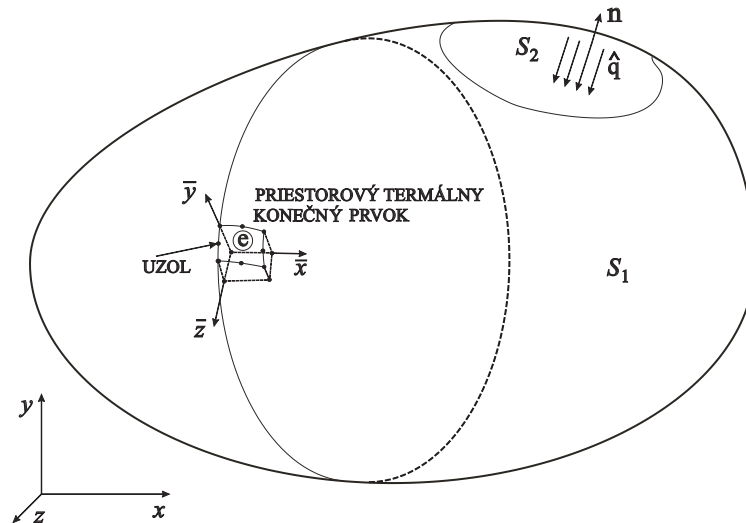
Lineárnu interpoláciu vypočítaných uzlových hodnôt teploty spolu s exaktným priebehom teploty sme graficky porovnali v obr.11. Program ďalej určil veľkosť tepelného toku z uzla 7 (zo steny) do uzla 5 = 73.8 W a z uzla 7 do uzla 8 = 48 W. Celkový tok zo steny do prúta takto podľa tohto výpočtu je 73.8 + 48 = 121.8 W. Zvyšovaním počtu prvkov výsledky konvergujú k exaktným hodnotám. Napr. exaktná hodnota teploty na izolovanom konci prúta ($x = 0$) podľa (26) je 33,7 °C a uvedený výpočet s 10 kondukčnými prvkami dáva $T_1 = 33,9$ °C.



Obr.11 Porovnanie exaktného priebehu teploty a riešenia pomocou programu ANSYS s tromi jednorozmernými prvkami a lineárnymi interpolačnými funkciami

Priestorové teleso

Uvažujme priestorové teleso, ktoré sa nachádza v podmienkach nestacionárneho prenosu tepla (obr. 12). Pre funkciu teploty $T \equiv T(x, y, z, t)$ opisujúcu nestacionárne teplotné pole v čase t vo všeobecnom termálne ortotropnom telese platí diferenciálna rovnica (11)



Obr. 12 Všeobecné priestorové teleso s nestacionárnym teplotným poľom

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \bar{Q}(x, y, z, t) \quad (85)$$

kde je

ρ ... hustota materiálu telesa v kgm^{-3}

c ... merné teplo materiálu telesa v $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$

t ... čas v sekundách

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$... súčinitele tepelnej vodivosti vo $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

\bar{Q} ... výdatnosť tepelného zdroja v telese (prírastok tepla v jednotke objemu za jednotku času) vo Wm^{-3}

Nerovnomerné rozdelenie teploty v telese vyvolá tepelný tok q (vo Wm^{-2})

$$q(x, y, z, t) = - \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (86)$$

ktorý po určení funkcie T možno vypočítať z uvedeného vzťahu.

Pretože (85) je diferenciálna rovnica 1. rádu vzhľadom na čas, musíme pre ňu zadať jednu *začiatočnú podmienku*

$$T(x, y, z, t = 0) = T_0(x, y, z) \quad (87)$$

kde funkcia T_0 udáva rozdelenie teploty na začiatku riešenia úlohy v celom objeme telesa.

Okrem toho pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu (vzhľadom na polohové premenné) musíme zadať dve *okrajové podmienky*. Dirichletova okrajová podmienka v tomto prípade je

$$T(x, y, z, t) = T_1(x, y, z, t) \quad \text{na } S_T \quad (88)$$

kde S_T je časť povrchu telesa, kde sme predpísali teplotu.

Neumanova (Cauchyho) okrajová podmienka predpisuje hustotu tepelného toku \hat{q}_n (vo Wm^{-2}) cez plochu S_q

$$\hat{q}_n = \lambda_n \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z \quad \text{na } S_q \quad (89)$$

kde vystupujú smerové kosínusy n_x, n_y, n_z vonkajšej normály n k ploche S_q .

Na ploche S_k možno tiež zadať okrajovú podmienku pre tepelný tok odvádzaný, resp. privádzaný konvekciou s okrajovou podmienkou

$$\hat{q}_k = -h(T - T_\infty) \quad \text{na } S_k \quad (90)$$

kde h je zadaný koeficient prestupovej vrstvy vo $WK^{-1}m^{-2}$ a T_∞ je známa (zadaná) teplota tekutiny. (Analogicky možno zadať aj okrajovú podmienku pre radiáciu tepla, ktorá automaticky mení úlohu na nelineárnu.)

Vo všeobecnosti plochy S_T , S_q a S_k predstavujú súhrn viacerých plôch príslušného typu a platí $S_T \cup S_q \cup S_k = S$, $S_T \cap S_q \cap S_p = 0$, kde S je celkový povrch telesa. Z podmienok ich zadania vyplýva, že pre každý bod povrchu telesa (každý uzlový bod výpočtového modelu MKP) musí byť zadaná okrajová podmienka - buď pre teplotu alebo tepelný tok. Programy MKP na nezadané „povinné“ podmienky väčšinou reagujú takto (je užitočné si to v programe overiť)

- Nezadaná začiatočná podmienka \Rightarrow vo všetkých bodoch telesa je na začiatku riešenia úlohy teplota rovná nule
- Nezadaná okrajová podmienka pre teplotu \Rightarrow vo všetkých bodoch povrchu telesa platí podmienka pre tepelný tok.
- Nezadaná okrajová podmienka pre tepelný tok \Rightarrow vo všetkých bodoch povrchu telesa (kde nie je zadaná okrajová podmienka pre teplotu) je tepelný tok rovný nule – teleso je teda na tejto časti plochy tepelne izolované. Z tohto vyplýva aj to, že v prípade rovinných úloh je teleso v smere kolmom na rovinu riešenia tepelne izolované.

Možno dokázať, že funkcia $T(x, y, z, t)$ spĺňajúca rovnicu (85) je vo variačnej formulácii ekvivalentná funkcii, ktorá minimalizuje funkcionál

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \left[\lambda_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \lambda_z \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - 2 \left(\bar{Q} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) T \right] dV + \int_{S_q} \hat{q}_n T dS + \frac{1}{2} \int_{S_k} h (T - T_\infty)^2 dS \quad (91)$$

Variačná formulácia nestacionárnej úlohy prenosu tepla pre teleso potom znie takto: Treba nájsť takú funkciu $T(x, y, z, t)$, ktorá spĺňa začiatočnú podmienku (87) a okrajové podmienky (88), (89) a (90), že pri nej integrál (91) nadobúda minimálnu hodnotu. Takáto funkcia exaktne vyjadruje veľkosť teplôt v čase t v bodoch (x, y, z) telesa. Funkcionál (91) sme v [1] využili na odvodenie základných matíc formulácie MKP pre nestacionárne vedenie tepla v priestorovom telese. V ďalšom ukážeme odvodenie týchto matíc Galerkinovou metódou.

Geometrická diskretizácia úlohy. Matice prvku a telesa

Podľa rovnakých zásad ako pri riešení pevnostnej úlohy [1] rozdelíme teleso na konečné prvky a vyznačíme uzlové body. Nech celkový počet prvkov je NET a na každom prvku nech je NUE uzlových bodov. Funkcia, ktorá v čase t aproximuje rozdelenie teploty po všeobecnom e-tom prvku z jeho hodnôt v uzlových bodoch, nech je

$$T^e(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{NUE} N_j^e(x, y, z) T_j^e = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_{NUE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{Nue} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_e \mathbf{T}^e \quad (92)$$

kde T_j^e sú číselné hodnoty teplôt uzlových bodov prvku v čase t (sú to primárne neznáme úlohy analogické k zložkám posunutí pri pevnostnej úlohe) a N_j^e sú interpolačné (tvarové) funkcie prvku. Geometria prvkov i interpolačné funkcie nie sú závislé od fyzikálneho typu úlohy a z geometrického hľadiska sa model telesa tvorí pomocou tých istých prvkov, aké sa používajú pri pevnostných úlohách [1].

Neznáme uzlové hodnoty teploty sa musia určiť tak, aby funkcia (92) vyhovovala diferenciálnej rovnici (85) a spĺňala okrajové podmienky úlohy. Ako sme ukázali pri jednorozmerných úlohách, metódy vážených zvyškov vyžadujú, aby sa reziduálna funkcia R na oblasti prvku blížila k nule určitým sumačným (integrálnym) váženým spôsobom

$$\int_{V_e} w(x,y,z) R(x,y,z) dV = 0 \quad (93)$$

kde w je váhová funkcia. V našom prípade po dosadení (85) do (93) dostávame

$$\int_{V_e} w \left[\rho c \frac{\partial T^e}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T^e}{\partial z} \right) - \bar{Q}(x,y,z,t) \right] dV = 0 \quad (94)$$

Výraz v hranatej zátvorke predstavuje zvyšok diferenciálnej rovnice (85), pretože $T^e(x,y,z,t)$ je len aproximáciou exaktného riešenia $T(x,y,z,t)$ na oblasti prvku.

Slabá formulácia v tvare (94) obsahuje členy s druhou deriváciou hľadanej funkcie T^e a len jednoduchú spojitosť váhovej funkcie w . Využitie zložkového tvaru divergenčného teorému pre tieto členy (pri jednorozmerných úlohách sa na tento istý účel využila integrácia per partes) poskytuje výhodnejší tvar

$$\begin{aligned} & \int_{V_e} \left(\rho c w \frac{\partial T^e}{\partial t} - \lambda_x \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial T^e}{\partial x} - \lambda_y \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial T^e}{\partial y} - \lambda_z \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial T^e}{\partial z} - w \bar{Q} \right) dV \\ & - \int_{S_q^e} w \left(\lambda_x \frac{\partial T^e}{\partial x} n_x + \lambda_y \frac{\partial T^e}{\partial y} n_y + \lambda_z \frac{\partial T^e}{\partial z} n_z \right) dS = 0 \end{aligned} \quad (95)$$

v ktorom sa priamo objavila (analogicky s jednorozmernou úlohou) aj okrajová podmienka pre tepelný tok \hat{q}_n (89) a zápis rovnice možno skrútiť na

$$\int_{V_e} \left(\rho c w \frac{\partial T^e}{\partial t} - \lambda_x \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial T^e}{\partial x} - \lambda_y \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial T^e}{\partial y} - \lambda_z \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial T^e}{\partial z} - w \bar{Q} \right) dV - \int_{S_q^e} w \hat{q}_n dS = 0 \quad (96)$$

Po dosadení aproximačnej funkcie (92) do (96) a okrajovej podmienky pre konvekciu dostaneme

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{NUE} \left\{ \int_{V_e} \left[\rho c w \frac{\partial T^e}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) - \frac{\partial w}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T^e}{\partial y} \right) - \frac{\partial w}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T^e}{\partial z} \right) - w \bar{Q} \right] dV \right\} T_j^e \\ & - \int_{S_q^e} w \hat{q}_n dS - \int_{S_k^e} w h (T - T_\infty) dS = 0 \end{aligned} \quad (97)$$

Deriváciou funkcie T^e podľa času dostaneme z (92)

$$\frac{\partial T^e}{\partial t} = \dot{T}^e(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{NUE} N_j^e(x,y,z) \dot{T}_j^e \quad (98)$$

kde \dot{T}_j^e sú číselné hodnoty derivácie teploty podľa času v uzlových bodoch prvku ako ďalšie neznáme, vyvolané nestacionárnym členom v diferenciálnej rovnici.

Pri Galerkinovej metóde za váhovú funkciu sa postupne dosadzujú interpolačné (tvarové) funkcie prvku $N_1, N_2, \dots, N_i, \dots, N_{NUE}$ s aproximačnou funkciou (92) pre T^e , čím dostaneme potrebný počet rovníc pre určenie základných vzťahov a matíc prvku. S funkciou N_i dostaneme i -tu rovnicu tejto sústavy (97) v tvare

$$\sum_{j=1}^{NUE} C_{ij}^e \dot{T}_j + \sum_{j=1}^{NUE} (K_{1ij}^e + K_{2ij}^e) T_j = \hat{q}_{ni}^e + \hat{q}_{ki}^e + \bar{Q}_i^e \quad (99)$$

kde

$$\begin{aligned}
C_{ij}^e &= \int_{V_e} \rho c N_i^e N_j^e dV \\
K_{1ij}^e &= \int_{V_e} \left(\lambda_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right) dV \\
K_{2ij}^e &= \int_{S_k^e} h N_i^e N_j^e dS \\
\hat{q}_{ni}^e &= \int_{S_q^e} q_n N_i^e dS \\
\hat{q}_{ki}^e &= \int_{S_k^e} h T_\infty N_i^e dS \\
\bar{Q}_i &= \int_{V_e} \bar{Q} N_i^e dV
\end{aligned} \tag{100}$$

Ak do rovnice (99) dosadíme postupne všetky funkcie N_i , dostaneme NUE prvkových rovníc, ktoré zapíšeme v maticovom tvare

$$\mathbf{C}^e \dot{\mathbf{T}} + (\mathbf{K}_1^e + \mathbf{K}_2^e) \mathbf{T}^e = \mathbf{f}^e \tag{101}$$

kde primárne neznáme sú zapísané vo vektoroch (stĺpcových maticiach)

$$\mathbf{T}^e = [T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_i \quad \dots \quad T_{NUE}]^T \tag{102}$$

$$\dot{\mathbf{T}}^e = [\dot{T}_1 \quad \dot{T}_2 \quad \dots \quad \dot{T}_i \quad \dots \quad \dot{T}_{NUE}]^T \tag{103}$$

matica tepelnej kapacity (merného tepla, tepelného tlmenia) prvku je

$$\mathbf{C}^e = \int_{V_e} \rho_e c_e \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dV \tag{104}$$

Matica

$$\mathbf{K}_1^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \tag{105}$$

obsahujúca

$$\mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{NUE}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{NUE}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{NUE}}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \lambda_x^e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y^e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z^e \end{bmatrix}$$

sa nazýva matica difúznej vodivosti prvku. Matica

$$\mathbf{K}_2^e = \int_{S_{2k}^e} h \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dS \tag{106}$$

je matica plošnej vodivosti prvku.

Vektor “zaťaženia” prvku je

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_1^e + \mathbf{f}_2^e + \mathbf{f}_3^e = \int_{V_e} \bar{Q} \mathbf{N}_e^T dV + \int_{S_q^e} \hat{q}_n \mathbf{N}_e^T dS + \int_{S_k^e} h T_\infty \mathbf{N}_e^T dS \tag{107}$$

kde jeho tri členy predstavujú vektory generácie tepla, tepelného toku a konvekcie.

Ak analogicky s pevnostnou úlohou pomocou rozšírených matíc prvkov [1] sčítame prvkové matice do globálnych matíc výpočtového modelu celého telesa, dostaneme

$$C\dot{\mathbf{T}} + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)\mathbf{T} = \mathbf{f}$$

alebo v najúspornejšom zápise

$$C\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{f} \quad (108)$$

Názvy globálnych matíc sú analogické s názvami prvkových matíc, matica \mathbf{K} sa nazýva matica vodivosti telesa.

Vzťah (108) pri *lineárnej* úlohe predstavuje sústavu diferenciálnych rovníc 1. rádu s konštantnými koeficientami, ktorú program po časovej diskretizácii úlohy rieši v časových krokoch analogicky ako dynamickú úlohu [1]. Pri hľadaní ustáleného teplotného poľa, kedy prvý člen na ľavej strane je nulový, sa rieši sústava obyčajných rovníc rovnakými metódami ako pri statickej pevnostnej úlohe.

Po vypočítaní uzlových teplôt telesa (vektora \mathbf{T}) program v cykle cez všetky prvky telesa určí pomocou interpolačného vzťahu (92) aproximačné funkcie teploty v prvkoch a z nich odvodené neznáme. Výsledky potom môžeme v postprocesore programu analyzovať a textovo, resp. graficky spracovávať rovnakými postupmi a prostriedkami ako pri pevnostných úlohách.

Výhodou univerzálnych programov MKP, medzi ktoré patrí aj program ANSYS, je to, že fyzikálne rôzne typy úloh sa riešia analogicky, rovnakým postupom a v podstate aj pomocou rovnakých príkazov. Pri riešení úloh prenosu tepla môžeme teda využívať všetky skúsenosti získané pri riešení pevnostných úloh.

Pravda, treba rozlišovať fyzikálne rozdiely a rozumieť fyzikálnej podstate úlohy. Z formálneho hľadiska sa potom plošný tepelný tok zadáva v programe rovnako ako plošný tlak, okrajová podmienka pre teplotu sa zadáva rovnako ako okrajová podmienka pre posunutie atď. Úplne rovnako sa tiež vytvára geometrický a výpočtový model telesa, pravda, s fyzikálne rozdielnymi materiálovými konštantami a inak nazvanými prvkami; rovnaké prostriedky sa tiež využívajú na grafické i textové vyhodnotenie vypočítaných výsledkov.

Demonštrujú to dva vyriešené príklady s programom ANSYS, ktoré sú uvedené v [1] a na tejto internetovej stránke v časti *Základy riešenia lineárnych úloh* (kapitola *Prenos tepla vedením*) obsahujúce postup riešenia lineárneho stacionárneho a nestacionárneho vedenia tepla pri dvojrozmernej úlohe. Priestorové úlohy sa riešia úplne analogicky. Problematiku jednorozmerného *nelineárneho* vedenia tepla rozoberáme v dodatku D7.

Literatúra

[Lit1] R.W. Lewis, P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu: Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow. Wiley, 2004

[1] Š. Benča: Výpočtové postupy MKP pri riešení lineárnych úloh mechaniky. Vydavateľstvo STU Bratislava, 2004, 2006