

D1. Vzťahy medzi posunutím a deformáciou. Geometrické rovnice

Malé deformácie

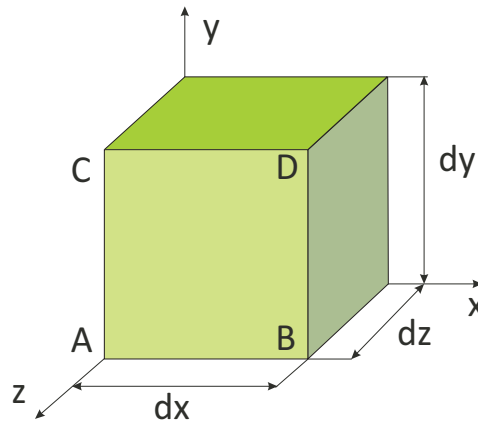
Uvažujme v kartézskom súradnicovom systéme priestorové deformovateľné teleso a zaťažme ho statickou sústavou vonkajších síl. Pretože teleso je upevnené (nemôže sa pohybovať ako tuhý celok) účinkom týchto síl sa východzia konfigurácia (geometria) telesa zmení, body telesa sa premiestnia (posunú) do novej polohy - teleso sa zdeformuje.

Predpokladajme, že poznáme vektor posunutia bodov telesa (deformačná formulácia MKP ich poskytuje na konečných prvkoch v aproximačnom tvare)

$$\mathbf{u}(x, y, z) \equiv u_i(x, y, z) \equiv \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

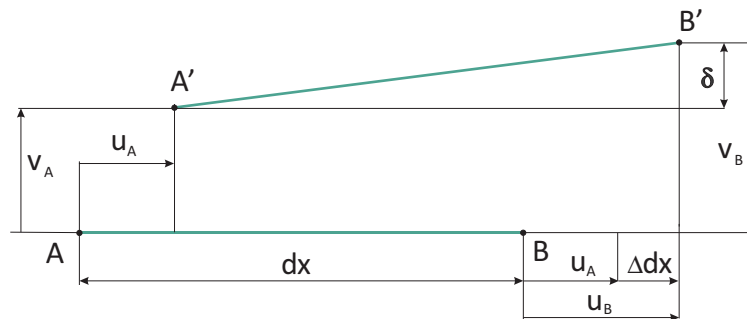
kde spojité funkcie u , v , a w sú zložky posunutia bodu xyz v smere súradnicových osí. Zaujíma nás vzťah medzi týmito funkciami a hľadanými funkciami, ktoré budú vyjadrovať mieru deformácie telesa v jeho bodoch.

Vyznačme vo vnútri nezaťaženého telesa vo všeobecnom mieste xyz diferenciálny (infinitesimálny, "nekonečne" malý, bodový) objemový element $dx dy dz$ (obr. 1.1).



Obr. 1.1

Účinkom zaťaženia sa element posunie v priestore a zdeformuje (vzhľadom na jeho malé rozmery sa uvažuje jednoduchý typ deformácie súvisiaci s definíciou napätia: zmenia sa jeho dĺžkové rozmery - v smere súradnicových osí sa natiahne alebo skrúti - a porušia sa pravé uhly medzi jeho stenami).



Obr. 1.2

Uvažujme na elemente dva body A a B na rovnobežnej hrane s osou x a vzdialené od seba o dx (obr. 1.2). Účinkom zaťaženia sa pôvodná poloha bodov A a B zmení. Ich spojnica sa posunie, zmení svoju dĺžku a natočí sa. Pri malých deformáciách zanedbávame účinok natočenia na dĺžku spojnice a za mieru deformácie elementu v smere x sa volí pomerná zmena x -ovej vzdialenosti bodov

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{u_B - u_A}{dx} \quad (1.1)$$

t.j. podiel zmeny vzdialenosti bodov Δdx k pôvodnej vzdialenosti dx . V prípade, keď sa element v smere osi x len posunie ako celok ($u_B = u_A$), je pochopiteľne $\varepsilon_x = 0$. Ako vidieť, je to bezrozmerné číslo i so znamienkom (s fyzikálnym významom pomerného predĺženia alebo skrátania).

Posunutie u_B určíme z rozvoja funkcie u v bode A do skráteneho Taylorovho radu vzhľadom na malé deformácie ($\varepsilon_x \ll 1$) sa uvažujú len prvé dva členy

$$u_B = u_A + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (1.2)$$

čo vlastne predstavuje linearizáciu funkcie u v okolí bodu A . Dosadením (1.2) do (1.1) dostávame vzťah pre výpočet pomernej deformácie v bodoch telesa

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.3)$$

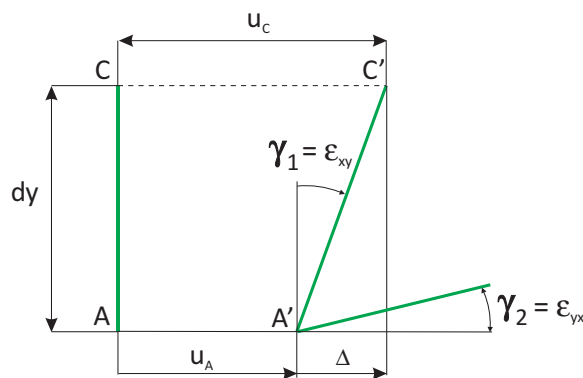
je to vlastne gradient funkcie $u(x, y, z)$.

Analogickým rozborom deformácie elementu v smere osi y a z by sme dostali

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_z(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.5)$$

Funkcie ε_x , ε_y a ε_z , ktoré nazývame *normálové deformácie*, vyvolajú zmenu objemu elementu, ale neporušia pravé uhly medzi jeho stenami, pretože len posúvajú rovnobežné steny elementu o rozdielnu hodnotu smere ich spoločnej normály. Zaťaženie telesa však vyvolá aj tzv. *šmykové deformácie* γ_{xy} , γ_{yz} a γ_{zx} , ktoré vzájomnú kolmosť stien narušia, pričom ale nezmenia objem elementu. Ak sa napr. bod C (obr. 1.1) posunie v smere osi x oproti bodu A o hodnotu Δ , potom podľa obr. 1.3



Obr. 1.3

opätovným využitím skráteneho Taylorovho radu pre vyjadrenie u_C dostávame

$$\Delta = u_C - u_A = u_A + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u_A = \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Zvislá stena elementu sa takto nakloní o uhol

$$\gamma_1 \approx \tan \gamma_1 = \frac{\Delta}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Analogicky pre natočenie vodorovnej steny (obr. 1.3) dostávame

$$\gamma_2 \approx \tan \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

a šmyková deformácia v rovine xy (celková zmena pravého uhlu elementu v rovine xy) je

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.6)$$

Cyklickou zámennou premenných dostaneme šmykové deformácie v ďalších dvoch rovinách

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.7)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.8)$$

Súhrnne môžeme tieto lineárne zložky deformácie vo všeobecnom bode telesa zapísať do (pseudo)vektora

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

V maticovom zápise *symetrického tenzora deformácie* sa uvažuje tenzorová šmyková deformácia $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ (obr. 1.3) na každej stene elementu (ako polovičná hodnota celkovej šmykovej deformácie) a platí

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0.5\gamma_{xy} & 0.5\gamma_{xz} \\ 0.5\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0.5\gamma_{yz} \\ 0.5\gamma_{xz} & 0.5\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

kde členy ε_{ij} získame z jednoduchého indexového zápisu

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.11)$$

Pri deformačnej formulácii pevnostnej úlohy, kedy primárnymi neznámymi je pole posunutí, vzťahy (1.9) jednoznačne určujú pole deformácií. Pravda inverzný problém, ktorý sa vyskytuje pri silovej formulácii, je zložitejší, pretože zo šiestich zložiek deformácie možno jednoznačne určiť tri zložky posunutia len pri zohľadnení obmedzení kladených na funkcie zložiek deformácie vo forme tzv. *rovníc kompatibility*

Poznámka: Geometrické rovnice s predpokladom malých deformácií sme využili v práci [1], v kap 2.1

Úvod k veľkým deformáciám

Lineárne geometrické vzťahy medzi zložkami posunutia a deformácie (1.9) v materiálových bodoch deformovaného telesa dobre vyhovujú pri veľkom množstve pevnostných úloh, pretože dôležité materiály používané v technickej praxi (kovy, betón, drevo, sklo atď.) dovoľujú len malé hodnoty deformácií. Napr. ak jeden meter dlhý prút konštantného prierezu natiahneme o 1 mm vyvoláme v ňom číselne malú pomernú deformáciu $\varepsilon_x = 0,001$. Takáto deformácia však v oceľovom prúte vyvolá napätie o veľkosti zhruba 200 MPa, čo je na hranici medze sklzu bežnej ocele, u množstva iných menej tvárných materiálov je to už za medzou pevnosti.

Pravda, existuje viacero materiálov (napr. priemyselná guma, niektoré plasty) a viacero technologických procesov (napr. rôzne druhy tvárnenia ocele), kedy lineárne geometrické rovnice nevyhovujú a pri simulačných výpočtoch sa musia použiť presnejšie vzťahy. Odvodenie týchto vzťahov nie je jednoduché, existuje viacero postupov i použitých mier deformácie, nie je jednoduchá ani ich aplikácia v MKP. Podrobnejšie o tom píšeme v D3 a v [2], kde je uvedená aj základná literatúra k tejto problematike. Tu si uvedieme len geometrický spôsob odvodenia zložiek Green- Lagrangeovho tenzora deformácie, čo už umožňuje určitý pohľad na nelineárne geometrické vzťahy, ale treba povedať, že vlastnosti a možnosti využitia každej miery deformácie sa dajú hlbšie ozrejmiť vždy len spolu s jej silovým partnerom - napätím.

Vráťme sa k obr. 1.2 a upresníme zmenu dĺžky spojnice bodov A a B tak, že zohľadníme aj vplyv rozdielneho posunutia týchto bodov v smere osi y . Tento rozdiel sme označili δ a aproximáciou funkcie v v okolí bodu A skráteným Taylorovým radom dostávame

$$v_B = v_A + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

takže

$$\delta = v_B - v_A = \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

a deformáciou zmenenú dĺžku spojnice bodov vyjadríme pomocou Pytagorovej vety

$$A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2} = dx \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$$

Zavedieme pomernú deformáciu (len kvôli jednoduchosti zápisu označenú rovnako ako pri malých deformáciách - pozri Poznámku 3)

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B'}{dx} - 1 = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - 1$$

Funkciu tvaru $\sqrt{1+x}$ možno rozložiť do radu $1 + x/2 + x^2/8 + \dots$ a predchádzajúci vzťah, po aproximácii člena s odmocninou dvomi členmi radu, môžeme upraviť na

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right] \quad (1.12)$$

Analogicky možno ukázať, že platí

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (1.13)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.14)$$

Je vidieť, že keď sú deformácie dostatočne malé, možno kvadratické členy zanedbať a dostaneme zložky deformácie odvodené vpredu pre takýto prípad.

Predchádzajúce vzťahy stačí už len doplniť o analogické členy pre smer osi z ; a môžeme zapísať nezávislé zložky Green-Lagrangeovho tenzora deformácie do vektora

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

alebo v stručnom indexovom zápise

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_m}{\partial x_\ell} \right) \quad (1.16)$$

Poznámka 1 : Inú formu odvodenia zložiek Green-Lagrangeovho tenzora deformácie sme uviedli a výrazy využili v [2], kap. 11 *Spojité teleso - teoretické minimum* a kap. 12 *Lagrangeovská formulácia geometricky nelineárneho prvku rovinatej napätosti*. Všeobecné základy kinematiky veľkých deformácií pomocou tenzorovej algebry uvádzame v doplnku D3.

Poznámka 2 : Ak prút o dĺžke ℓ_0 rovnobežný s osou x na konci umiestnenom v začiatku súradnicového systému upevníme a na druhom konci natiahneme o dĺžku $\Delta\ell$ potom sa jeho dĺžka zmení na $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$ a funkcia posunutia bude

$$u(x) = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} x = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} x$$

Podľa vzťahu (1.3), platnom pre malé deformácie, štandardná "inžinierska" miera deformácie prúta je

$$\varepsilon_{ing} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

Zo vzťahu (1.12) pre Greenovu mieru deformácie prúta platí

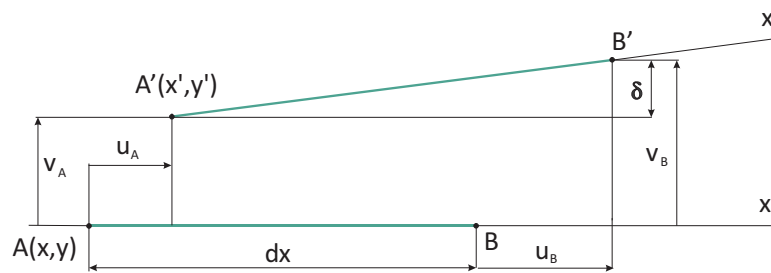
$$\varepsilon_G = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{\ell_0^2}$$

Pre malé deformácie ($\varepsilon_{ing} \ll 1$) je rozdiel medzi obidvomi mierami zanedbateľný

$$\varepsilon_{ing} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{(\ell - \ell_0)(\ell + \ell_0)}{\ell_0(\ell + \ell_0)} = \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{\ell_0(\ell + \ell_0)} = \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{\ell_0^2(2 + \varepsilon_{ing})} \approx \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{2\ell_0^2} = \varepsilon_G$$

Green-Lagrangeov tenzor deformácie je nezávislý na tuhom posunutí a tuhej rotácii telesa, a preto sa v MKP často výhodne využíva pri riešení úloh s malými deformáciami ale veľkými posunutiami a veľkými rotáciami v tzv. korotačnom súradnicovom systéme (v [2] sú to kapitoly 1, 7 a 12).

Poznámka 3 : Vráťme sa ešte raz k obrázku, z ktorého sme určovali zložky Green-Lagrangeovho tenzora deformácie:



Obr. 1.4

Green-Lagrangeovskú pomernú deformáciu ε_x vyjadruje, ako sme už uviedli, pomer

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

Je to výraz analogický s malými deformáciami, ale všimnime si, že teraz smer spojnice $A'B'$, a teda smer ε_x , je iný ako smer AB , resp. dx . Zložka má smer totožný so smerom x' , do ktorého sa natočila úsečka dx účinkom zaťaženia. Ak pri ďalšom zaťažovacom kroku sa úsečka len posunie a natočí, bez zmeny vzdialenosti $A'B'$, potom sa veľkosť deformácie nezmení. Zložky Green-Lagrangeovskej deformácie sledujú svojim smerom rotáciu elementu (materiálovej častice) ale ich veľkosť je na tejto rotácii (a samozrejme i na tuhom posunutí) nezávislá. Platí to potom i pre ich partnerské (energeticky zviazané) napäťové zložky *druhého Piola-Kirchhoffovho napätia*.