

D3 KINEMATIKA KONEČNÝCH/VEĽKÝCH DEFORMÁCIÍ

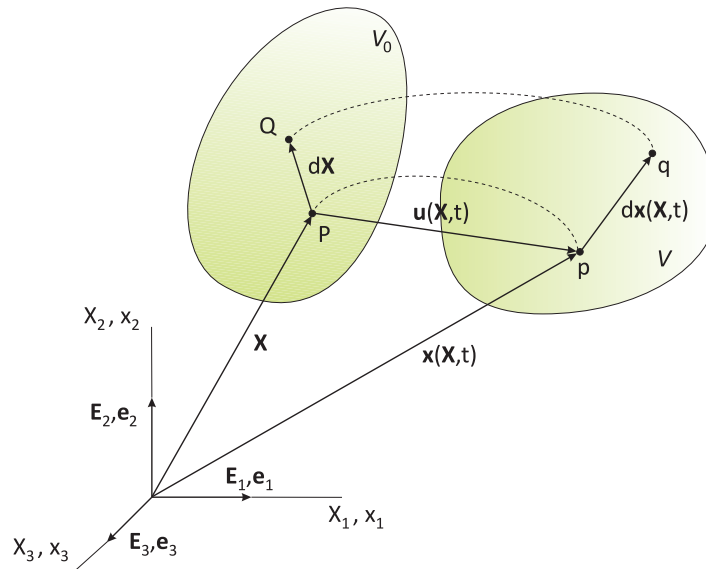
1. Pohyb telesa. Materiálové a priestorové súradnice

Deformovateľné teleso v mechanike kontinua predstavuje spojitú oblasť materialových bodov (materiálových častíc), ktorá v procese zaťažovania vykonáva v priestore vo všeobecnosti zložitý pohyb. Tento pohyb možno myslene rozložiť na pohyb telesa ako tuhého celku a jeho *deformáciu*, vyvolanú zmenou vzdialeností medzi bodmi telesa. Kinematika študuje a opisuje tento pohyb bez ohľadu na vonkajšie a vnútorné sily, ktoré tento pohyb vyvolávajú. Keby sme túto problematiku nezúžili pre naše potreby, museli by sme hovoriť o *oblasti kontinua* a nie o telese, o pohybe častíc *kontinua* a nie telesa a museli by sme rozšíriť úvahy a vzťahy aj do oblasti fluidnej mechaniky a termomechaniky.

Nazvime súhrn materiálových bodov tvoriacich model telesa v čase t jeho *konfiguráciou*. Konfigurácia bez deformácií v čase $t=0$ nech je *začiatočnou* konfiguráciou telesa. Polohu materiálových bodov v začiatočnej konfigurácii budú určovať v kartézskom súradnicovom systéme s bázovými (jednotkovými) vektormi \mathbf{E}_I (obr. 1) tzv. *materiálové* (Lagrangeovské) súradnice

$$\mathbf{X} = X_I \mathbf{E}_I \quad (3.1)$$

V začiatočnej konfigurácii budeme materiálové body telesa označovať veľkými písmenami a ostatné veličiny indexom nula: objem V_0 , plochu S_0 , dĺžku ℓ_0 , hustotu materiálu ρ_0 .



Obr.1

V procese zaťažovania sa teleso deformuje a posúva v priestore a v čase t materiálové body zaujímajú polohu udanú *priestorovými* (Eulerovskými) súradnicami

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i \quad (3.2)$$

kde x_i sú zložky polohového vektora bodu v tejto tzv. *aktuálnej* konfigurácii. Polohové vektory bodov v aktuálnej konfigurácii, ako vidieť z (3.2), môžu byť vyjadrené v inej báze - udanej \mathbf{e}_i , budeme však uvažovať zhodnosť \mathbf{E}_I a \mathbf{e}_i ; pri niektorých veličinách však ponecháme ich rozdielne označenie, aby sme vyjadrili príslušnosť danej veličiny ku začiatočnej alebo aktuálnej konfigurácii telesa. V aktuálnej konfigurácii budeme označovať objem V , plochu S , dĺžku ℓ a hustotu ρ .

Zložitý fyzikálne vzťahy medzi začiatočnou a aktuálnou konfiguráciou budeme skúmať teraz len z kinematického hľadiska, takže funkciu vyjadrujúcu polohu bodov v aktuálnej konfigurácii možno vyjadriť v tvare

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (3.3)$$

Zápis pohybovej *vektorovej funkcie* $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ na pravej strane tejto rovnice je síce názorný, ale označenie je totožné s označením polohového vektora bodu, a preto sa môžeme stretnúť aj s ekvivalentným zápisom pohybu telesa v tvare

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X},t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{X},t) \quad (3.4)$$

kde $\phi(\mathbf{X},t)$ je funkcia popisujúca (mapujúca) tento pohyb.

Ak si zvolíme materiálové súradnice \mathbf{X} a čas t za nezávislé premené - takto vystupujú napr. v rovniciach (3.3) a (3.4) - potom takýto popis pohybu sa nazýva *materiálový* alebo Lagrangeovský a hovoríme o Lagrangeovskej (materiálovej) formulácii. V takomto prípade ak si v začiatočnej konfigurácii vyznačíme ľubovoľný materiálový bod P so súradnicami \mathbf{X}_p potom vo všeobecnosti nelineárna funkcia $\mathbf{x}_p(t) = \phi(\mathbf{X}_p, t)$ určuje zakrivenú pohybovú dráhu (cestu) materiálového bodu P (jeho polohového vektora) počas vyšetřovaného pohybu telesa. Pre určitý konkrétny nemenný čas t_n funkcia $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t_n)$ zase udáva deformovanú konfiguráciu telesa v tomto čase.

Pri Lagrangeovskej formulácii a riešení úlohy môžeme teda sledovať pohyb a deformačnú zmenu telesa od začiatočnej konfigurácie až po aktuálnu, čo je nevyhnutné pri úlohách, ktoré sú z nejakého dôvodu (napr. materiálového) od tejto cesty závislé, nehovoriac o tom, že je pritom obvyčajne potrebné poznať aj zdeformovaný tvar telesa.

Možná je aj formulácia úlohy, kedy nezávislé premenné sú \mathbf{x} a t , a ktorá sa nazýva *priestorová* alebo Eulerovská formulácia. S takýmto opisom pohybu častíc kontinua a následnou formuláciou i riešením úlohy sa môžeme stretnúť hlavne vo fluidnej mechanike. Nezávislým priestorovým súradniciam sa však niekedy nedá vyhnúť ani pri *nelineárnych* pevnostných úlohách, kde sa preferuje Lagrangeovská formulácia, najmä pri tvorbe konštitutívnych rovníc (vzťahov medzi deformáciou a napätím). Pravda, *jednoznačná väzba* medzi fyzikálnym vzťahom vyjadreným pomocou jedných alebo druhých súradníc vyplýva z pohybu telesa, ktorý je, samozrejme, na súradniciach nezávislý. Je teda možné transformovať každý vzťah z jedného systému súradníc do druhého - nie je to však vždy jednoduchá záležitosť.

2. Deformačný gradient. Natiahnutie (stretch)

V predchádzajúcej časti sme ukázali, že ak si v začiatočnej (nedeformovanej) konfigurácii zvolíme všeobecný bod s polohovým vektorom \mathbf{X} , potom jeho polohu v aktuálnej (deformovanej) konfigurácii určuje vektor $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X},t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{X},t)$. Nelineárnu vektorovú funkciu ϕ možno v okolí bodu \mathbf{x} rozvinúť do skráteného Taylorovho radu (linearizovať v okolí tohoto bodu) pri nemennom čase t

$$\phi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \phi(\mathbf{X}, t) + \nabla_{\mathbf{X}} \phi(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{X} + o(d\mathbf{X}^2) \quad (3.5)$$

kde výraz

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}} \phi(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (3.6)$$

sa nazýva *deformačný gradient*. Pretože je to gradient *vektorovej funkcie*, je to tenzor 2. rádu

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{I=1}^3 \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_I} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_I \quad (3.7)$$

Pri deformačnom pohybe telesa sa úsečka $d\mathbf{X}$ spájajúca dva susedné materiálové body \mathbf{X} a $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ premiestni a zmení na úsečku $d\mathbf{x}$ (obr. 1) pričom platí

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (3.8)$$

Deformačný gradient podľa (3.8) obsahuje v sebe dôležitú informáciu o deformácii (natiahnutí a natočení) materiálovej úsečky $d\mathbf{X}$ po jej deformačnej transformácii na $d\mathbf{x}$, čo je vlastne informácia

o deformácii v okolí bodu, ktorý je v začiatočnej konfigurácii určený vektorom \mathbf{X} . Údaje o priestorovom posunutí (premiestnení) tohto bodu určuje vektor posunutia $\mathbf{u}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) - \mathbf{X}$ (vid obr. 1) a potom pre deformáciu úsečky $d\mathbf{X}$ tiež platí

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = (\mathbf{I} + \mathbf{D})d\mathbf{X} \quad (3.9)$$

kde \mathbf{I} je jednotkový tenzor a \mathbf{D} je tenzor derivácií posunutia alebo tenzor gradientu posunutia (displacement-derivative tensor, displacement gradient tensor).

Pre potreby algoritmickej a prípadného programového spracovania, ale aj kvôli väčšej názornosti, je užitočné zapisovať dôležité tenzory vo forme matic. Deformačný gradient podľa (3.7) je

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

a matica tenzora derivácií posunutia podľa (3.9)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Z (3.9) vyplýva vzťah

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{D} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \quad (3.12)$$

ktorý je v MKP základným zdrojom určovania deformačného gradientu v integračných bodoch prvkov výpočtového modelu telesa. V iteračnom procese vieme totiž v konečných prvkoch vyjadriť aproximačné funkcie zložiek posunutí $\mathbf{u}(X,Y,Z,t)$ a z nich aj potrebné derivácie do (3.11). Z hľadiska MKP môžeme tenzory \mathbf{D} a \mathbf{F} v ďalšej analýze kinematiky deformácie považovať za známe veličiny.

3. Miery deformácie

Uvažujme v začiatočnej konfigurácii telesa čiarový element $d\mathbf{X}$ s dĺžkou dL , ktorý sa účinkom deformačného pohybu telesa natiahne (alebo skrúti) na $d\mathbf{x}$ o dĺžke $d\ell$ a vo všeobecnosti sa aj natočí. Podľa (3.9) platí

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (3.13)$$

Po vydelení oboch strán tohto vzťahu súčinom $dLd\ell$ dostávame

$$\lambda n = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{N} = \mathbf{F}\mathbf{N} \quad (3.14)$$

kde

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{X}}{dL} \quad \text{a} \quad \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{x}}{d\ell} \quad (3.15)$$

sú jednotkové vektory, ktoré určujú smery čiarového elementu pred a po deformácii. *Koeficient natiahnutia* (stretch ratio) alebo *pomerne natiahnutie* λ určuje pomernú dĺžkovú zmenu elementu

$$\lambda = \frac{d\ell}{dL} \quad (3.16)$$

Rovnicu (3.14) upravíme tak, že na oboch stranách urobíme skalárny súčin vektorov so sebou samým

$$(\lambda \mathbf{n}) \cdot (\lambda \mathbf{n}) = (\mathbf{FN}) \cdot (\mathbf{FN})$$

a postupnou úpravou dostávame

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n}) &= \lambda^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = \lambda^2 = (\mathbf{FN}) \cdot (\mathbf{FN}) \\ &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^T (\mathbf{FN}) \\ &= \mathbf{N} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \mathbf{N} \\ &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{C} \mathbf{N} \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde, ako vidieť, pre tzv. *pravý Cauchy-Greenov tenzor deformácie* platí

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (3.18)$$

Dostali sme tak jednu z použiteľných mier deformácie telesa namáhaného priestorovou napätosťou. Ak v začiatočnej (referenčnej) konfigurácii zadáme smer \mathbf{N} pre čiarový element $d\mathbf{X}$, potom tenzor \mathbf{C} umožňuje určiť natiahnutie λ tohto elementu po jeho deformačnej zmene na $d\mathbf{x}$ v aktuálnej konfigurácii.

Dôležitý a často využívaný tenzor deformácie dostaneme z analogickej analýzy rozdielu kvadrátov dĺžok $d\ell$ a dL

$$\begin{aligned} d\ell^2 - dL^2 &= (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}) - (d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) \\ &= (\mathbf{F}d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}) - (d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) \\ &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T (\mathbf{F}d\mathbf{X}) - (d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C}d\mathbf{X}) - (d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I})d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E}d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (3.19)$$

kde

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (3.20)$$

je *Green-Lagrangeov tenzor deformácie*. Využitím inverzného vzťahu (3.9) a analogickým postupom (ale teraz vylúčením \mathbf{X}) by sme dostali *Almansiho (Eulerovský) tenzor deformácie*, ktorý je funkciou priestorových súradníc

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (3.21)$$

kde

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (3.22)$$

je *ľavý Cauchy - Greenov tenzor deformácie*.

Pretože sa zaujímame o deformáciu telesa, budeme sa v ďalšom predovšetkým venovať Lagrangeovým mieram, ktoré sú funkciou materiálových súradníc, a to hlavne Green-Lagrangeovmu tenzoru deformácie \mathbf{E} , ktorý sme využívali v [2]. Jeho hlavné vlastnosti možno zhrnúť takto:

- Je to symetrický tenzor a jeho nezávislé členy možno po rozpísaní podľa vzťahov (3.20) a (3.12) vyjadriť v pseudovektorovom tvare (vhodnom pre maticové operácie a programové spracovanie)

$$\{\mathbf{E}\} = \begin{bmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \\ 2E_{XY} \\ 2E_{YZ} \\ 2E_{ZX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \frac{\partial w}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Z} \right)^2 \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial Z} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial Z} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial Z} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial Z} \right) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

- Možno dokázať, že je nezávislý na čistej rotácii telesa ako tuhého celku, čo je prirodzená požiadavka na mieru deformácie. Uvažujme nedeformované teleso v začiatkovej konfigurácii, ktoré sa pohybuje ako tuhý celok. Takýto pohyb možno zložiť z rotácie okolo začiatku súradnicového systému a z čisto translačného pohybu

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{X} + \mathbf{x}_T(t) \quad (3.24)$$

kde \mathbf{R} je tenzor rotácie a \mathbf{x}_T je vektor translačného pohybu. V takomto prípade ale podľa (3.7) platí $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ a k deformácii nedôjde, lebo z definície Green-Lagrangeovho tenzora deformácie (3.20) dostaneme

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}^T \mathbf{R} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

kde sa zohľadnilo, že \mathbf{R} je ortogonálny tenzor.

- Je zovšeobecnením jednoosového Greenovho pomerného predĺženia $\varepsilon_G = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$, ktoré z neho dostaneme pri čistej jednoosovej deformácii. Vtedy deformačný gradient podľa (3.10) je

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} d\ell/dL & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a z (3.20) dostávame

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} d\ell/dL & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\ell/dL & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Pri všeobecnej deformácii podľa (3.19) platí

$$\frac{1}{2}(d\ell^2 - dL^2) = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X} \quad (3.26)$$

a po vydelení s dL^2

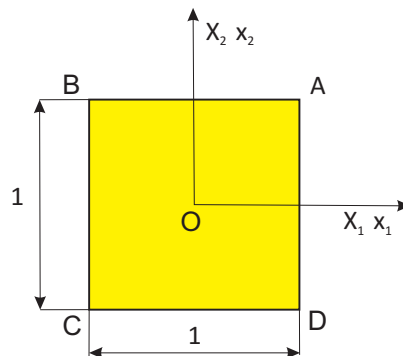
$$\frac{d\ell^2 - dL^2}{2dL^2} = \frac{d\mathbf{X}}{dL} \cdot \mathbf{E} \frac{d\mathbf{X}}{dL} \rightarrow \varepsilon_G = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E} \mathbf{N} \quad (3.27)$$

kde $\mathbf{N} = d\mathbf{X}/dL$ udáva zvolený (udaný) smer elementárnej úsečky $d\mathbf{X}$ vychádzajúcej z bodu \mathbf{X} začiatočnej konfigurácie telesa.

Takto pre elementárnu úsečku transformovanú do aktuálnej konfigurácie $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$ môžno z \mathbf{F} určiť Greenovu deformáciu a pomocou (3.14) alebo (3.15) aj jej smer \mathbf{n} .

Príklad 1 Analýza deformácie pomocou deformačného gradientu

Rovinná štvorcová materiálová častica s veľmi malými (teoreticky nekonečne malými) jednotkovými rozmermi umiestnená kvôli jednoduchosti v začiatku súradnicového systému podľa obrázku



Obr. 2

vykonala deformačný pohyb do ustálenej polohy podľa funkcie

$$\phi(\mathbf{X}) = \mathbf{x}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} x_1(X_1, X_2) \\ x_2(X_1, X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5X_1 - 1,2X_2 + 3 \\ 2,6X_1 + 2,0X_2 + 1 \end{bmatrix}$$

Podľa týchto rovníc sa stred častice $O(0; 0)$ posunul do polohy $o(3; 1)$, čo môžeme považovať za posunutie častice a rohový bod $A(0,5; 0,5)$ do polohy

$$x_1^a = 1,5X_1^A - 1,2X_2^A + 3 = 1,5 \cdot 0,5 - 1,2 \cdot 0,5 + 3 = 3,15$$

$$x_2^a = 2,6X_1^A + 2,0X_2^A + 1 = 2,6 \cdot 0,5 + 2,0 \cdot 0,5 + 1 = 3,30$$

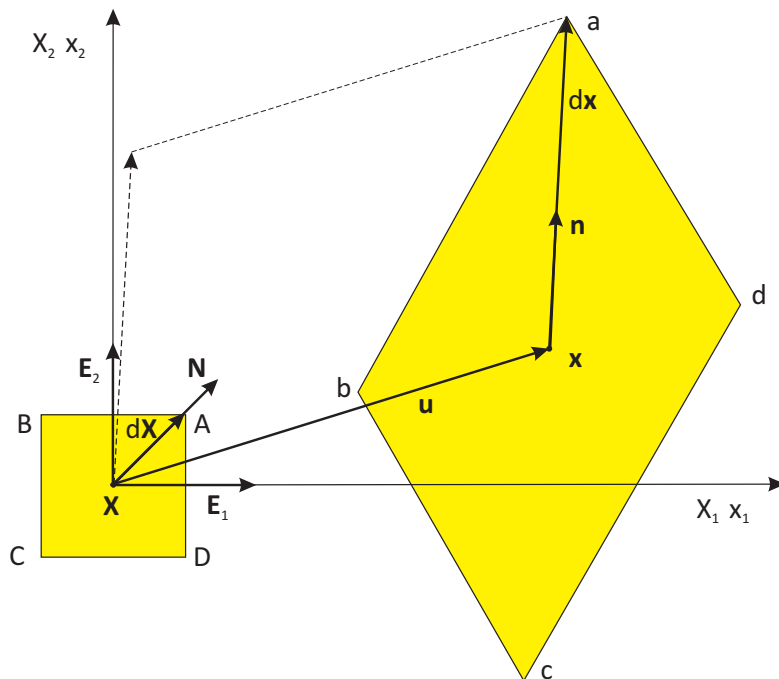
Analogicky by sme dostali aj novú polohu ostatných rohových bodov: $b(1,65; 0,70)$, $c(2,85; -1,30)$, $d(4,35; 1,30)$. Do obr. 3 sme tieto body nakreslili v merítke a pospájali, čím sme získali predstavu o novej polohe a deformácii častice. Deformačný gradient tejto transformácie je

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & -1,2 \\ 2,6 & 2,0 \end{bmatrix}$$

Deformačný gradient umožňuje analýzu deformácie v tesnom okolí bodu, ktorého polohu v začiatočnej konfigurácii udáva vektor \mathbf{X} . Uvažujme v začiatočnej konfigurácii telesa čiarový element

$$d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

s dĺžkou $dL = 1/\sqrt{2} = 0,7071$ znázornený v obr. 3.



Obr. 3

Podľa (3.13) pre jeho deformáciu platí

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1,5 & -1,2 \\ 2,6 & 2,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,15 \\ 2,30 \end{bmatrix}$$

Tento vektor je v obr. 3 znázornený čiarkovane; jeho reálnu polohu učuje posunutie (pozri tiež obr.1). Pre jeho dĺžku (absolútnu veľkosť) platí

$$d\ell^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0,15 & 2,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,15 \\ 2,30 \end{bmatrix} = 5,3125 \quad \rightarrow \quad d\ell = 2,3049$$

Koeficient natiahnutia je

$$\lambda = \frac{d\ell}{dL} = \frac{2,3049}{0,7071} = 3,2596$$

Jednotkový vektor \mathbf{n} udávajúci smer $d\mathbf{x}$ možno určiť podľa (3.14) alebo z (3.15)

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{F} \mathbf{N} = \frac{1}{3,2596} \begin{bmatrix} 1,5 & -1,2 \\ 2,6 & 2,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,7071 \\ 0,7071 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0651 \\ 0,9979 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{x}}{d\ell} = \frac{1}{2,3049} \begin{bmatrix} 0,15 \\ 2,30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0651 \\ 0,9979 \end{bmatrix}$$

4. Polárny rozklad deformačného gradientu

Na základe Cauchyho teóremy o polárnom rozklade tenzora možno deformačný gradient dvomi spôsobmi rozložiť na súčin dvoch tenzorov

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (3.28)$$

kde symetrické tenzory \mathbf{U} a \mathbf{V} sú *pravý* a *ľavý tenzor natiahnutia* (názvy majú podľa polohy voči \mathbf{R}) a \mathbf{R} je ortogonálny *tenzor rotácie* ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$). Pre pravý Cauchy-Greenov tenzor deformácie (3.18) potom platí

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (3.29)$$

kde sa využila symetria \mathbf{U} ($\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$) a ortogonálnosť \mathbf{R} .

Green-Lagrangeov tenzor deformácie (3.20) je

$$\mathbf{E}(\mathbf{X},t) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) \quad (3.30)$$

Deformačný vzťah pre $d\mathbf{X}$ (3.13) je možné zapísať v tvare

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} = \mathbf{R}(\mathbf{U}d\mathbf{X}) = \mathbf{R}d\mathbf{X}' \quad (3.31)$$

kde pomocné zátvorky naznačujú, že deformácia $d\mathbf{X}$ sa uskutoční v dvoch krokoch: najprv sa $d\mathbf{X}$ natiahne na $d\mathbf{X}' = \mathbf{U}d\mathbf{X}$ a potom sa natočí do $d\mathbf{x} = \mathbf{R}d\mathbf{X}'$. Celkovo sa teda deformačný pohyb materiállovej častice skladá z troch separovateľných fáz: posunutia, natiahnutia a rotácie.

Problém, ktorý treba zvládnuť pri rozklade deformačného gradientu, je určenie tenzora \mathbf{U} , pretože \mathbf{R} sa potom už vypočíta zo vzťahu (3.28)

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} \quad (3.32)$$

Aby bol zaručený rozklad deformačného gradientu na čisté natiahnutie a čistú rotáciu musia byť čiarové elementy $d\mathbf{X}$ a $d\mathbf{X}'$ v (3.31) rovnobežné, z čoho vyplýva

$$d\mathbf{X}' = \mathbf{U}d\mathbf{X} = \lambda d\mathbf{X} \quad (3.33)$$

a ďalej, pretože podľa (3.15) $d\mathbf{X} = \mathbf{N}dL$

$$\mathbf{U}\mathbf{N} = \lambda\mathbf{N} \quad (3.34)$$

Rovnica (3.34) predstavuje lineárny problém vlastných čísiel, ktorého riešením sú *hlavné natiahnutia* λ_K a s nimi zviazané *hlavné smery* \mathbf{N}_K tenzora \mathbf{U} . Jednotkové vektory \mathbf{N}_K vzhľadom na symetriu \mathbf{U} tvoria ortonormálnu bázu *spektrálnej reprezentácie* (spektrálnej dekompozície) \mathbf{U} a platí

$$\mathbf{U} = \sum_{K=1}^3 \lambda_K \mathbf{N}_K \otimes \mathbf{N}_K \quad (3.35)$$

Tento dôležitý vzťah rozpíšeme v maticovom tvare

$$\mathbf{U} = \lambda_1 \{\mathbf{N}_1\}\{\mathbf{N}_1\}^T + \lambda_2 \{\mathbf{N}_2\}\{\mathbf{N}_2\}^T + \lambda_3 \{\mathbf{N}_3\}\{\mathbf{N}_3\}^T \quad (3.36)$$

Pretože pri umocnení \mathbf{U} na prirodzené číslo sa báza nemení, (3.35) je špeciálnym prípadom všeobecného vzťahu

$$\mathbf{U}^n = \sum_{K=1}^3 \lambda_K^n \mathbf{N}_K \otimes \mathbf{N}_K \quad (3.37)$$

Pomocou (3.37) možno vyjadriť Cauchy-Greenov tenzor deformácie (3.29) v tvare

$$\mathbf{C}(\mathbf{X},t) = \mathbf{U}^2 = \sum_{K=1}^3 \lambda_K^2 \mathbf{N}_K \otimes \mathbf{N}_K \quad (3.38)$$

a pre Green-Lagrangeov tenzor deformácie podľa (3.30) dostávame

$$\mathbf{E}(\mathbf{X},t) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) = \sum_{K=1}^3 \frac{1}{2}(\lambda_K^2 - 1) \mathbf{N}_K \otimes \mathbf{N}_K \quad (3.39)$$

Dôležitý tenzor *logaritmickej deformácie* možno určiť z (3.37) ako špeciálny prípad pre $n = 0$

$$\mathbf{E}_{ln}(\mathbf{X},t) = \ln \mathbf{U} = \sum_{K=1}^3 \ln \lambda_K \mathbf{N}_K \otimes \mathbf{N}_K \quad (3.40)$$

Z porovnania (3.35) a (3.37) vyplýva, že (3.34) možno prepísať na

$$\mathbf{U}^2 \mathbf{N} = \lambda^2 \mathbf{N} \quad (3.41)$$

a pretože $\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, hodnoty λ_K a \mathbf{N}_K sa určujú štandardným postupom riešenia problému vlastných čísiel (3.41) z rovníc

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \lambda^2 \mathbf{I}) \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

a podmienky pre ich nenulové korene

$$\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \lambda^2 \mathbf{I}) = 0 \quad (3.43)$$

Pomocou známych hodnôt λ_K a \mathbf{N}_K sa tenzor \mathbf{U} určí pomocou (3.35) alebo (3.36).

Príklad 2 Polárny rozklad deformačného gradientu rovinatej úlohy

Treba určiť matice \mathbf{U} a \mathbf{R} deformačného gradientu z príkladu 1

$$\mathbf{F} = \mathbf{UR} = \begin{bmatrix} 1,5 & -1,2 \\ 2,6 & 2,0 \end{bmatrix}$$

Podľa (3.29) dostávame

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} 1,5 & 2,6 \\ -1,2 & 2,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 & -1,2 \\ 2,6 & 2,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,01 & 3,40 \\ 3,40 & 5,44 \end{bmatrix}$$

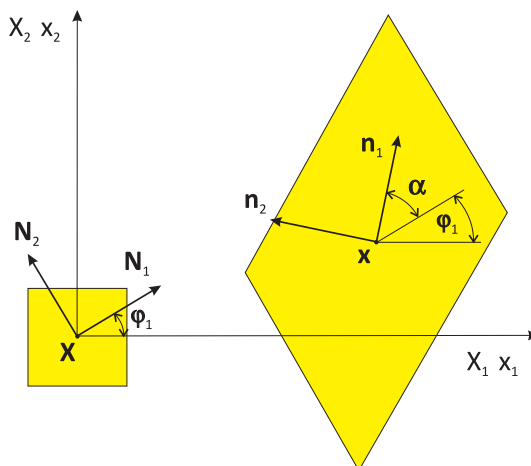
Z (3.42) dostaneme sústavu homogénnych rovníc, ktorá má nenulové riešenie len pri podmienke, že determinant matice jej koeficientov (3.43) sa rovná nule

$$\det \begin{bmatrix} 9,01 - \lambda^2 & 3,4 \\ 3,4 & 5,44 - \lambda^2 \end{bmatrix} = 0$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice dostaneme λ_1^2 , λ_2^2 a po odmocnení hodnoty hlavných pomerných natiahnutí $\lambda_1 = 3,3264$ a $\lambda_2 = 1,8398$. Jednotkové vektory hlavných smerov určíme z (3.42) po postupnom dosadení λ_1 a λ_2 a výpočte členov \mathbf{N}_1 a \mathbf{N}_2 z týchto rovníc

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0,8558 \\ 0,5173 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} -0,5173 \\ 0,8558 \end{bmatrix}$$

Smer prvého hlavného natiahnutia λ_1 dostaneme z vektora \mathbf{N}_1 : $\cos \varphi_1 = 0,8558$ a $\sin \varphi_1 > 0 \rightarrow \varphi_1 = 31,15^\circ$. Hlavné smery sú navzájom ortogonálne, a teda uhol $\varphi_2 = 121,15^\circ$ (obr. 4).



Obr. 4

Matica natiahnutia podľa (3.36) je

$$\mathbf{U} = \lambda_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T + \lambda_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2^T = 3,3264 \begin{bmatrix} 0,8558 \\ 0,5173 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8558 & 0,5173 \end{bmatrix} + 1,8398 \begin{bmatrix} -0,5173 \\ 0,8558 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5173 & 0,8558 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2,9286 & 0,6581 \\ 0,6581 & 2,2376 \end{bmatrix}$$

a maticu rotácie dostaneme z (3.32)

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & -1,2 \\ 2,6 & 2,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,37 & -0,11 \\ -0,11 & 0,48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6775 & -0,7355 \\ 0,7355 & 0,6775 \end{bmatrix}$$

Pretože matica rotácie vektora v rovine o uhol α je

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

ľahko zistíme, že smery hlavných natiahnutí (jednotkové vektory \mathbf{N}_i) sa pri zaťažení natočia o uhol $\alpha = 47,35^\circ$.

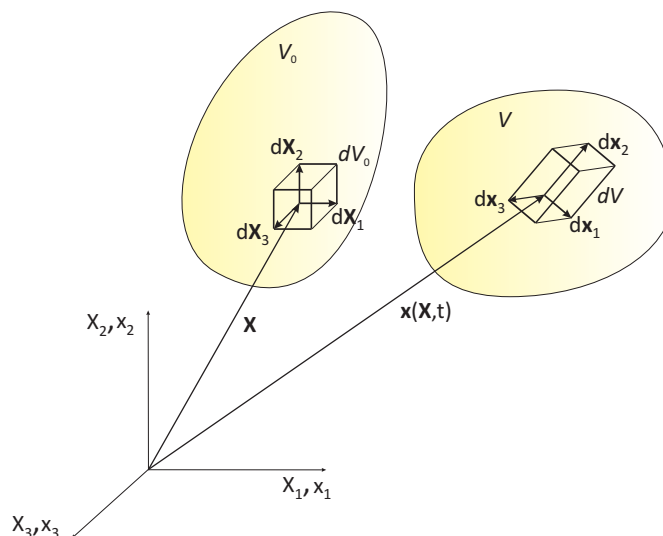
Na základe analýzy možno konštatovať, že sa častica v smere udanom uhlom $\varphi_1 = 31,15^\circ$ natiahne s hodnotou $\lambda_1 = 3,3264$, v smere kolmom o hodnotu udanú $\lambda_2 = 1,8398$ a potom takto zdeformovaná sa ako tuhý celok natočí o uhol $\alpha = 47,35^\circ$ (pozri obr.4).

Algoritmizáciou tohoto postupu (v MKP spojenou aj s geometrickou a časovou diskretizáciou) možno určovať tenzory (matice) deformácií (3.38) až (3.40) príp. i ďalšie, ktoré ako funkcie \mathbf{X} a t definujú deformačný pohyb telesa.

5. Zmena objemu

Deformácia telesa vyvoláva zmenu objemu telesa a z toho vyplývajúcu zmenu hustoty materiálu. Tak, ako sa mení deformácia v každom bode telesa, tak sa mení aj objem a hustota a ich zmeny sa musia skúmať a vyjadrovať na diferenciálnom objeme materiállovej častice telesa.

Uvažujme v začiatočnej konfigurácii telesa objemový element dV_0 , ktorého hrany sú rovnobežné so súradnicovými osami a sú udané vektormi $d\mathbf{X}_1 = dX_1 \mathbf{E}_1$, $d\mathbf{X}_2 = dX_2 \mathbf{E}_2$ a $d\mathbf{X}_3 = dX_3 \mathbf{E}_3$, kde \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 a \mathbf{E}_3 sú jednotkové ortogonálne vektory (obr. 5).



Obr. 5

Objem tohto elementu je

$$dV_0 = dX_1 dX_2 dX_3 \quad (3.45)$$

Ako vieme z predchádzajúceho, pohyb elementu možno poskladať z troch fáz: jeho posunutie do polohy $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ bez zmeny vektorov a jeho objemu, ďalej natiahnutie jeho vektorov podľa vzťahu (3.13)

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

spojené so zmenou objemu elementu a nakoniec jeho rotácia bez zmeny objemu. Zdeformovaný element bude opäť šesťsten s tromi rovnobežnými párami stien (obr. 5), ktorého vektory hrán budú

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1} dX_1 \quad (3.46)$$

$$d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2} dX_2 \quad (3.47)$$

$$d\mathbf{x}_3 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3} dX_3 \quad (3.48)$$

Z vektorovej analýzy vieme, že objem šesťstena udaného vektormi jeho hrán je skalárny trojnásobný súčin týchto vektorov, a preto zmenený objem elementu je

$$dV = d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3} \right) dX_1 dX_2 dX_3 \quad (3.49)$$

Keď si pripomenieme deformačný gradient (3.10)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

vidíme, že vektory $\partial \mathbf{x} / \partial X_i$ v (3.49) sú vlastne stĺpce deformačného gradientu a ich trojnásobný súčin je determinant (Jacobian J) tenzoru \mathbf{F} . Potom pre zmenený objem elementu tiež platí

$$dV = J dV_0; \quad J = \det \mathbf{F} \quad (3.50)$$

Pri deformácii sa hmotnosť telesa nemení, musia sa teda zachovávať aj hmotnosti elementov a platí

$$dm = \rho_0 dV_0 = \rho dV \quad (3.51)$$

Zákon zachovania hmotnosti (rovnica kontinuity) má potom tvar

$$\rho_0 = \rho J \quad (3.52)$$

Z (3.50) vyplýva

$$J = \det \mathbf{F} > 0 \quad (3.53)$$

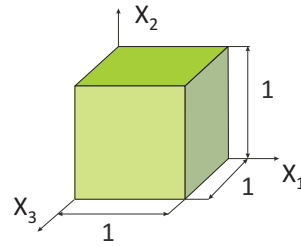
pretože objem zdeformovaného elementu sa nemôže rovnať nule, ani nemôže byť záporný.

Poznámka:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Příklad 3 Výpočet objemu zdeformovaného materiálového elementu

Materiálová častica tvaru kocky s veľmi malými (teoreticky nekonečne malými) jednotkovými rozmermi (obr.6) je zaťažovaná v rovine X_1X_2 rovinnou deformáciou (rozmer v smere X_3 sa nemení).



Obr. 6

Jej deformačný gradient v aktuálnom zaťažovacom kroku je

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1,5 & -1,2 & 0 \\ 2,6 & 2,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Začiatkový objem elementu je jednotkový $dV = dX_1 dX_2 dX_3 = 1$ a pre jeho zdeformovaný objem podľa (3.49) platí

$$dV = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3} \right) dX_1 dX_2 dX_3 = \begin{bmatrix} 1,5 & 2,6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,0 \\ 1,2 \\ 0 \end{bmatrix} = 6,12$$

alebo tiež podľa (3.50)

$$dV = \det \mathbf{F} dV_0 = \det \begin{bmatrix} 1,5 & -1,2 & 0 \\ 2,6 & 2,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = [1,5 \cdot 2,0 \cdot 1 - (-1,2) \cdot 2,6 \cdot 1] \cdot 1 = 6,12$$

Objem elementu po deformácii bude 6,12-krát väčší (pozri obr. 4).

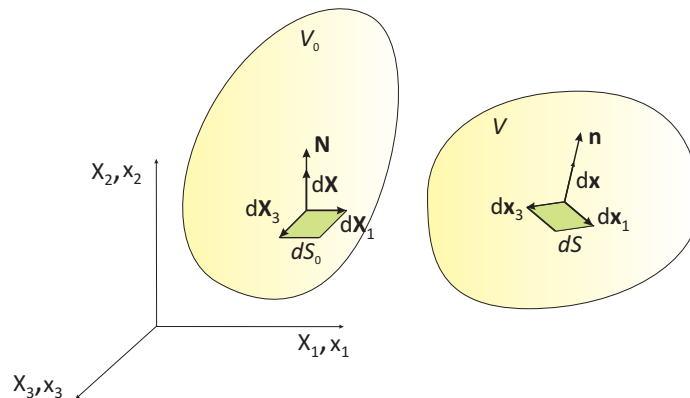
6. Zmena plochy

Pri transformácii plošného zaťaženia medzi začiatkovou a aktuálnou konfiguráciou treba poznať vzťah medzi vektorom plošného elementu v začiatkovej konfigurácii

$$d\mathbf{S}_0 = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_3 = \mathbf{N} dS_0 \quad (3.54)$$

a jeho hodnotou po deformácii (obr. 7)

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_3 = \mathbf{n} dS \quad (3.55)$$



Obr. 7

kde \mathbf{N} a \mathbf{n} sú jednotkové normálové vektory. Zvoľme čiarový element $d\mathbf{X}$ tak, že $\mathbf{N} \cdot d\mathbf{X} > 0$ a vytvoríme z vektorov $d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2, d\mathbf{X}_3$ a $d\mathbf{X}$ objem dV_0 a z vektorov $d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2, d\mathbf{x}_3$ a $d\mathbf{x} = Fd\mathbf{X}$ objem dV . Potom podľa (3.49) pre zdeformovaný objem takéhoto elementu platí

$$dV = d\mathbf{x} \cdot (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} dS = (\mathbf{F}d\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n} dS$$

Objem zdeformovaného elementu možno vyjadriť aj z (3.50)

$$dV = JdV_0 = Jd\mathbf{X} \cdot (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) = Jd\mathbf{X} \cdot \mathbf{N} dS_0$$

Porovnaním pravých strán týchto rovníc dostávame

$$(\mathbf{F}d\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n} dS = Jd\mathbf{X} \cdot \mathbf{N} dS_0 \quad (3.56)$$

a z toho tzv. *Nansonov vzorec*

$$\mathbf{n} dS = J(\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{N} dS_0 \quad \text{alebo} \quad d\mathbf{S} = J(\mathbf{F}^{-1})^T \cdot d\mathbf{S}_0 \quad (3.57)$$

Absolútnu veľkosť plochy v aktuálnej konfigurácii pomocou hodnôt začiatočnej konfigurácie dostaneme, keď vektory na oboch stranách prvej z týchto rovníc skalárne vynásobíme sebou samým, odmocníme a upravíme pomocou vzťahov pre pravý a ľavý Cauchy-Greenov tenzor deformácie

$$dS = \frac{J}{\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}\mathbf{n}}} dS_0 = J \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}} dS_0 \quad (3.58)$$

7. Miery rýchlosti deformácie

Dôležitá veličina, ktorá je jednoznačne definovaná v aktuálnej (zdeformovanej) konfigurácii je tenzor Cauchyho napätia $\boldsymbol{\sigma}$ [D2]. V integračných (energetických) rovniciach rovnováhy úloh s malými deformáciami je zviazaný s tenzorom malých deformácií $\boldsymbol{\varepsilon}$ a napr. pre virtuálnu prácu vnútorných síl platí

$$\delta W_{\text{int}} \approx \int_{V_0} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_0 \quad (3.59)$$

Tento vzťah je len približný, možno ho použiť len pri formulácii a riešení úloh s malými deformáciami, pretože integrácia sa vykonáva na začiatočnom (nezdeformovanom) objeme telesa (stotožňujú sa priestorové súradnice s materiálovými) a navyše tenzor $\boldsymbol{\varepsilon}$ [D1]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (3.60)$$

obsahuje len lineárne členy derivácií funkcií zložiek vektora posunutia $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ podľa materiálových súradníc.

Pripomeňme si, že tak ako každý tenzor, aj tenzor gradientu posunutia \mathbf{D} (3.12) sa dá rozložiť na symetrickú a antisymetrickú časť

$$\mathbf{D} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left[(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \right] + \frac{1}{2} \left[(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) - (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \right] \quad (3.61)$$

a tenzor malých deformácií predstavuje symetrickú časť tohto rozkladu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u})^T \right] \quad (3.62)$$

Predpokladajme, že poznáme rýchlosť častice telesa ako funkciu priestorových súradníc

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\phi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (3.63)$$

potom *tenzor gradientu rýchlosti*

$$\mathbf{l} = \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.64)$$

môže analogicky ako gradient posunutia zohrať úlohu tvorby miery deformácie, ale vyjadrenej pomocou priestorových súradníc. Ak sú rýchlosti všetkých bodov rovnaké, gradient rýchlosti je nulový, k deformácii nedochádza; rozdielna rýchlosť susedicich bodov a z toho vyplývajúci gradient rýchlosti, vyvolá deformáciu. Symetrická časť tohto tenzoru

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T] = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad (3.65)$$

sa nazýva *tenzor rýchlosti deformácie*, nezávisí od tuhého pohybu telesa a slúži ako miera deformácie v priestorových súradniciach. Antisymetrická časť rozkladu gradientu rýchlosti

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{v}) - (\nabla \mathbf{v})^T] = \frac{1}{2} (\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \quad (3.66)$$

sa nazýva *tenzor spinu* alebo (najmä vo fluidnej mechanike) *tenzor víru rýchlosti*, ktorý udáva rýchlosť rotácie častice nezávisle na jej deformácii.

Pre väzbu medzi aktuálnou a začiatočnou konfiguráciou telesa je potrebné vyjadriť rýchlostné miery deformácie pomocou materiálových súradníc t.j. pomocou veličín, ktoré sú funkciami materiálových súradníc. Najjednoduchšie sa to dá urobiť pomocou derivácie deformačného gradientu podľa času

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{l} \mathbf{F} \quad (3.67)$$

a z toho

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (3.68)$$

Dosadením tohto výsledku do (3.65) by sme dostali aj vzťah pre vyjadrenie tenzora rýchlosti \mathbf{d} pomocou materiálových súradníc, užitočnejšie je však jeho vyjadrenie pomocou materiálových mier deformácie. Uvažujme preto elementárne vektory $d\mathbf{X}_1$, $d\mathbf{X}_2$ a ich stav v aktuálnej konfigurácii $d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_1$, $d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_2$. Potom po zohľadnení (3.18) platí

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X}_2 = d\mathbf{X}_1 \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X}_2) = d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}_2 \quad (3.69)$$

Urobme deriváciu tohto vzťahu podľa času a zohľadnime pritom aj závislosť (3.20) $2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I}$

$$\frac{d}{dt} (d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) = d\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{C}} d\mathbf{X}_2 = 2d\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{X}_2 \quad (3.70)$$

kde $\dot{\mathbf{E}}$ je derivácia Green-Lagrangeovho tenzora deformácie podľa času, ktorú možno vyjadriť pomocou deformačného gradientu v tvare

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) \quad (3.71)$$

Skalárny súčin s tenzorom $\dot{\mathbf{E}}$ v (3.70) sa dá vyjadriť aj pomocou priestorových elementárnych vektorov $d\mathbf{x}_1$, $d\mathbf{x}_2$ využitím inverzných vzťahov $d\mathbf{X}_1 = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}_1$ a $d\mathbf{X}_2 = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}_2$

$$\frac{d}{dt} (d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) = 2d\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{X}_2 = 2\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}_1 \cdot (\dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}_2) = 2d\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}) = 2d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{d} d\mathbf{x}_2 \quad (3.72)$$

Vyjadrili sme takto náprotivok $\dot{\mathbf{E}}$ v aktuálnej konfigurácii, ktorým je tenzor rýchlosti deformácie

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \quad (3.73)$$

Presvedčme sa o tom dosadením (3.71) do tohto vzťahu s prihliadnutím na (3.68)

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-T} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) \mathbf{F}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \dot{\mathbf{F}}) \mathbf{F}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T + \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{l}^T + \mathbf{l}) \end{aligned}$$

Energeticky konjugovaná dvojica Cauchyho napätia $\boldsymbol{\sigma}$ a tenzora rýchlosti deformácie \mathbf{d} umožňuje vyjadriť virtuálnu prácu vnútorných síl (3.59) v aktuálnej konfigurácii v tvare

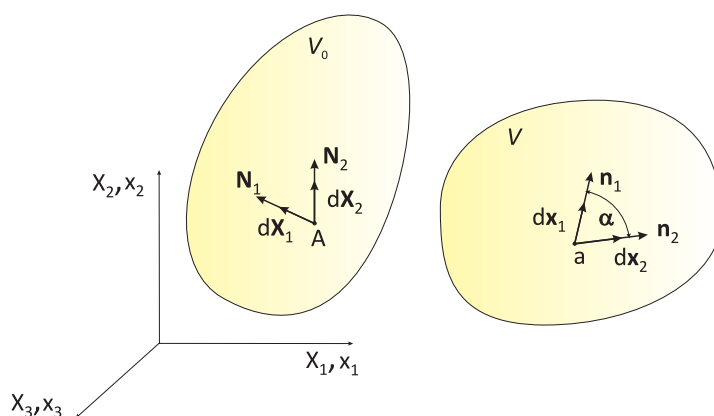
$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} dV \quad (3.74)$$

Pretože zdeformovaný objem telesa V nepoznáme, treba tento integrál transformovať na začiatočný objem, čo vyvolá potrebu zavedenia špeciálnych mierok napätia [D4].

8. Fyzikálna interpretácia tenzora rýchlosti deformácie

Podľa vektorovej algebry pre súčin elementárnych vektorov v aktuálnej konfigurácii platí $d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\ell_1 d\ell_2 \cos \alpha$ (obr.7). Derivácia tohto súčinu podľa času je

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) = \frac{d(d\ell_1)}{dt} ds_2 \cos \alpha + d\ell_1 \frac{d(d\ell_2)}{dt} \cos \alpha - \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \quad (3.75)$$



Obr. 7

Keď ju dáme do rovnosti s jej hodnotou v (3.72) a výslednú rovnicu vydelíme s $d\ell_1 d\ell_2$ dostaneme

$$\frac{1}{d\ell_1} \frac{d(d\ell_1)}{dt} \cos \alpha + \frac{1}{d\ell_2} \frac{d(d\ell_2)}{dt} \cos \alpha - \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = 2\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{d}\mathbf{n}_2 \quad (3.76)$$

kde $\mathbf{n}_i = d\mathbf{x}_i / d\ell_i$ sú jednotkové vektory.

Zvoľme teraz špeciálny prípad, kedy sa jednotkové vektory stotožnia: $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$. Vtedy $ds_1 = ds_2 = ds$, $\alpha = 0$ a rovnica (3.76) sa zredukuje na

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}\mathbf{n} = \frac{1}{d\ell} \frac{d(d\ell)}{dt} \quad (3.77)$$

Výsledok je vlastne definícia tzv. *skutočnej rýchlosti deformácie*, čo je rýchlosť zmeny elementárnej dĺžky podelená touto dĺžkou v aktuálnej konfigurácii. S využitím koeficientu natiahnutia $\lambda = d\ell / dL$, kde dĺžka elementu v začiatočnej konfigurácii dL nezávisí od času, dostaneme

$$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \quad (3.78)$$

Ak zvolíme jednotkový vektor \mathbf{v} smere súradnicovej osi x_1 ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$), potom z (3.78) zistíme, že rýchlosť natiahnutia v tomto smere udáva diagonálny člen d_{11} tenzora \mathbf{d} ; analogicky pre smer x_2 a x_3 dostaneme d_{22} a d_{33} . Diagonálne členy tenzora rýchlosti deformácie teda udávajú rýchlosť *normálovej* deformácie.

Pre určenie fyzikálneho významu nediagonálnych členov tenzora rýchlosti deformácie zvolíme v (3.76) $\alpha = 90^\circ$. Vtedy sú čiarové elementy v čase t na seba kolmé a táto rovnica sa zmená na

$$-\frac{d\alpha}{dt} = 2\mathbf{n}_1 \cdot d\mathbf{n}_2 \quad (3.79)$$

Zvoľme špeciálny prípad, kedy jednotkové vektory majú smer osí x_1 a x_2 . Vtedy dostaneme

$$-\frac{d\alpha}{dt} = 2d_{12} \quad (3.80)$$

Je vidieť, že d_{12} je rýchlosť *šmykovej* deformácie (rýchlosť zmeny pravého uhlu medzi čiarovými elementami). Mínusové znamienko vyjadruje znižovanie tohto uhlu. Rovnaký význam majú aj ostatné nediagonálne členy d_{13} a d_{23} pre ďalšie dve kombinácie súradnicových osí. Pretože tenzor rýchlosti je symetrický tenzor, určili sme fyzikálny význam všetkých jeho členov. Ako vidieť, je analogický s fyzikálnym významom členov tenzora malej deformácie $\boldsymbol{\varepsilon}$.