D4. Alternatívne miery napätia

Cauchyho napätie $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ [D2] je funkciou priestorových súradníc $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ a vyjadruje napätie v aktuálnej (zdeformovanej) konfigurácii telesa. Pri rozbore kinematiky veľkých deformácií telesa [D3] sme uviedli dve deformačné miery, ktoré sú súradnicovo kompatibilné s Cauchyho napätím: sú to tenzor gradientu rýchlosti

$$\boldsymbol{l} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}} \tag{4.1}$$

a symetrická časť tohto tenzoru, tzv. tenzor rýchlosti deformácie

$$\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T\right) \tag{4.2}$$

V súčine s Cauchyho napätím dávajú vnútornú deformačnú energiu jednotkového objemu za časovú jednotku a sú vhodné pre tvorbu energetických podmienok rovnováhy telesa v aktuálnej konfigurácii. O takejto dvojici hovoríme, že je energeticky konjugovaná (spojená, zviazaná). Ak si za mieru deformácie zvolíme tenzor gradientu rýchlosti, potom vnútorná virtuálna energia telesa v čase t je

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{l} \, dV \tag{4.3}$$

kde V je zdeformovaný objem telesa. Pretože tento objem nepoznáme, treba integrál (a potom i kompletnú podmienku rovnováhy) vyjadriť pre známy začiatočný objem V_0 a integrant transformovať na funkciu materiálových súradníc. Potrebné vzťahy na tento postup sme pripravili v [D3] odkiaľ preberáme

$$dV = (\det \mathbf{F})\, dV_0 = J\, dV_0 \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{l} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \tag{4.5}$$

kde J je Jacobián deformačného gradientu $\mathbf{F}$. Pomocou týchto vzťahov možno (4.3) prepísať na

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} J\boldsymbol{\sigma} : \left(\delta \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\right) dV_0 = \int_{V_0} tr\left(J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\delta\dot{\mathbf{F}}\right) dV_0 = \int_{V_0} \left(J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}\right) : \delta\dot{\mathbf{F}}\, dV_0 \tag{4.6}$$

kde sa uplatnili vhodné vzťahy z ponuky tenzorových operácií

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} : \mathbf{B} = tr\left(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\right) = tr\left(\mathbf{B}\mathbf{A}^T\right) = tr\left(\mathbf{B}^T\mathbf{A}\right) = tr\left(\mathbf{A}\mathbf{B}^T\right) \\ &tr(\mathbf{ABC}) = tr(\mathbf{CAB}) = tr(\mathbf{BCA}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Výsledok v (4.6) možno zapísať v tvare

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} \mathbf{P} : \delta\dot{\mathbf{F}}\, dV_0 \tag{4.8}$$

kde tenzor

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \tag{4.9}$$

sa nazýva *prvé Piola-Kirchhoffovo napätie*, ktoré, ako vidieť zo (4.8) je energeticky zviazané s rýchlosťou deformačného gradientu $\dot{\mathbf{F}}$. Alternatívnym uplatnením pravidiel (4.7) by sme v (4.6) dostali transponovanú hodnotu $\mathbf{P}$, tzv. *nominálne napätie*

$$\mathbf{N} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}^T \tag{4.10}$$

Je užitočné na tomto mieste si pripomenúť fyzikálny význam Cauchyho napätia a porovnať ho s fyzikálnym významom prvého Piola-Kirchhoffovho napätia. Cauchyho vektor napätia $\mathbf{p}$ vyjadruje podiel elementárnej sily $d\mathbf{P}$ a elementárnej plošky dS v aktuálnej konfigurácii a platí [D2]

$$d\mathbf{P} = \mathbf{p}\,dS = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\,dS = \boldsymbol{\sigma}\,d\mathbf{S} \tag{4.11}$$

Vyjadrime teraz pomocou tohto vzťahu elementárnu silu v aktuálnej konfigurácii $d\mathbf{P}$ tak, že vektor plošky v (4.11) transformujeme pomocou Nansonovho vzorca [D3, (3.57)]

$$d\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{S}_0 \tag{4.12}$$

do začiatočnej konfigurácie

$$d\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} d\mathbf{S}_0 = \mathbb{P} d\mathbf{S}_0 \tag{4.13}$$

Zo (4.13) vyplýva, že prvé Piola-Kirchhoffovo napätie, tak ako jeho deformačný partner $\dot{\mathbf{F}}$, je tzv. "dvojbodový" tenzor (je to podiel elementárnej sily v *aktuálnej* konfigurácii na plošku v *začiatočnej* konfigurácii), navyše nesymetrický, a preto je známejšia a viac sa využíva jeho symetrická alternatíva *druhé Piola-Kirchoffovo napätie*. Toto napätie vyplynie zo zviazania Cauchyho napätia so symetrickým tenzorom rýchlosti deformácie $\mathbf{d}$ v rovnici (4.3)

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d}\, dV \tag{4.14}$$

Pri transformácii tohto integrálu na začiatočný objem opäť platí $dV = JdV_0$ a podľa [D3 (3.73)]

$$\delta\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T}\delta\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1} \tag{4.15}$$

takže

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} J\boldsymbol{\sigma} : \left(\mathbf{F}^{-T}\delta\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1}\right) dV_0 \tag{4.16}$$

S využitím zo (4.7) $\mathbf{A} : \mathbf{B} = tr\left(\mathbf{B}^T\mathbf{A}\right)$ a s platnosťou $tr(\mathbf{ABCD}) = tr(\mathbf{CDAB})$

možno (4.16) upraviť na

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} tr\left(\mathbf{F}^{-1}J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}\,\delta\dot{\mathbf{E}}\right) dV_0 = \int_{V_0} \mathbb{S} : \delta\dot{\mathbf{E}} dV_0 \tag{4.17}$$

kde

$$\mathbb{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \tag{4.18}$$

je symetrický tenzor *druhého Piola-Kirchhoffovho napätia*, ktorý, ako vidieť z (4.17) je energeticky spojený s rýchlosťou Green-Lagrangeovho tenzora deformácie $\dot{\mathbf{E}}$.

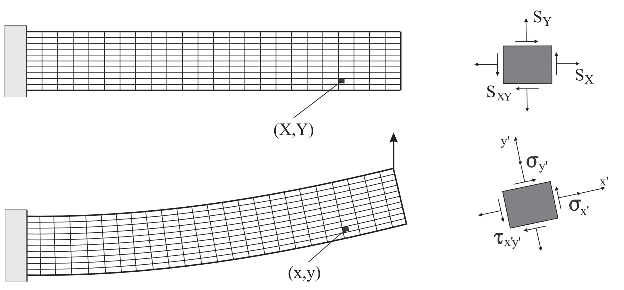
Za svoju pomerne značnú popularitu vďačí druhé Piola-Kirchhoffovo napätie jednej svojej vlastnosti, ktorú teraz stručne ozrejmíme. Pri úlohách s veľkými posunutiami a veľkými rotáciami, ale malými deformáciami, platí [D3]

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{R}\,; \qquad J = \rho_0/\rho \approx 1 \tag{4.19}$$

kde $\mathbf{R}$ je ortogonálny tenzor rotácie ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$). Potom sa (4.18) zjednoduší na

$$\mathbb{S} = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R} \tag{4.20}$$

z čoho vyplýva, že zložky tenzorov $\mathbb{S}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ sú v takomto prípade rovnaké, ale zložky Cauchyho napätia sú oproti materiálovým osiam X, Y, Z natočené o uhly vyplývajúce z **R**. Tento vzťah medzi zložkami $\mathbb{S}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ pri rovinnej úlohe MKP ilustruje obr. 4.1



Obr. 4.1

Pri formulácii niektorých úloh možno využiť tenzor *Kirchhoffovho napätia* $\boldsymbol{\tau}$, ktorý dostaneme z (4.14) po jednoduchom prechode na integrál po začiatočnom objeme pomocou vzťahu $dV = JdV_0$

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d}\, dV = \int_{V_0} J\boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d}\, dV_0 = \int_{V_0} \boldsymbol{\tau} : \delta\mathbf{d}\, dV_0 \tag{4.21}$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že Kirchhoffovo napätie

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \tag{4.22}$$

je energeticky zviazané s tenzorom rýchlosti deformácie v integrali cez *začiatočný* objem. Je to ale veličina vyjadrovaná v priestorových súradniciach.

Uveďme ešte pre úplnosť inverzné vzťahy alternatívnych mierok napätia

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{P}\mathbf{F}^T \; ; \qquad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \; ; \qquad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\boldsymbol{\tau} \tag{4.23}$$

Poznamenávame, že Cauchyho napätie je najlepšia miera skutočného napätia v deformovanom telese. Ostatné miery treba chápať ako prostriedok využívaný na formuláciu a riešenie nelineárnych úloh s následnou transformáciou na Cauchyho napätie.