D5. Totálna Lagrangeovská formulácia

Riešenie okrajových a začiatočných úloh poddajného telesa pomocou MKP vychádza z princípu virtuálnych prác, resp. jeho alternatív, ako je napr. princíp virtuálnych posunutí. Tento princíp sme v [D2] aplikovali na *aktuálnu* konfiguráciu telesa, pričom sme vychádzali z diferenciálnych (lokálnych, bodových) rovníc rovnováhy

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{5.1}$$

kde σ_{ij} sú zložky tenzora Cauchyho napätia b_i sú zložky vektora objemových síl vztiahnutých na jednotku objemu. Pretože nás zaujíma riešenie stacionárnej úlohy, do (5.1) sme nezahrnuli zotrvačné sily. Ak na body telesa (s výnimkou bodov kde sú predpísané reálne posunutia) aplikujeme spojité virtuálne posunutia $\delta u_i(x,y,z)$ a takto upravené rovnice (5.1) zitegrujeme po aktuálnom objeme telesa V dostaneme

$$\int_V \left(\sigma_{ij,j} + b_i\right)\delta u_i dV = 0 \tag{5.2}$$

Postupom uvedenom v [D2] dostaneme z (5.2) výsledný tvar globálnej podmienky rovnováhy telesa (v tenzorovom zápise)

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{ext} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u} dV - \int_{S_p} \mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{u} dS = 0 \tag{5.3}$$

kde $\mathbf{b}$ a $\mathbf{p}$ sú vektory objemového a plošného zaťaženia a $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ predstavuje virtuálnu zmenu tenzora analogického s tenzorom malých deformácií, ktorý sa pri odvádzaní (5.3) zaviedol v tvare [D2]

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\delta\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}\right) + \delta\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\right] \tag{5.4}$$

Všetky veličiny v uvedených vzťahoch sú funkciami *priestorových* súradníc a integrály treba vyjadriť na neznámom zdeformovanom objeme a zdeformovanej ploche.

Pre úplnosť uveďme, že pokiaľ by sme na teleso aplikovali viruálnu zmenu rýchlosti $\delta v_i(x,y,z)$, rovnakým postupom by sme dostali rovnicu rovnováhy (princíp virtuálnych výkonov) v tvare

$$\delta W = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\mathbf{d} dV - \int_V \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{v} dV - \int_{S_p} \mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{v} dS = 0 \tag{5.5}$$

kde $\delta\mathbf{d}$ je virtuálna zmena tenzoru rýchlosti deformácie [D3]

$$\delta\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left(\delta\boldsymbol{l} + \delta\boldsymbol{l}^T\right) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}\right) + \delta\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\right] \tag{5.6}$$

Zaoberajme sa teraz vyjadrením globálnej (integrálnej) podmienky rovnováhy telesa pomocou *materiálových* súradníc. Dopredu prezradíme, že sa využíva pri tzv. totálnej Lagrangeovskej formulácii úlohy, o ktorej budeme hovoriť v súvislosti s touto podmienkou. Pri virtuálnej zmene *posunutia* virtuálna práca vnútorných síl na začiatočnej konfigurácii telesa je [D4]

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV_0 \tag{5.7}$$

kde $\mathbf{S}$ je tenzor druhého Piola-Kirchhoffovho napätia, $\mathbf{E}$ je tenzor Green-Lagrangeovej deformácie a V_0 je začiatočný (nemenný) známy objem telesa. Pokiaľ je vonkajšie zaťaženie konzervatívne (nezávislé od deformácie telesa) virtuálna práca vonkajších je

$$\delta W_{ext} = \int_{V_0} \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u} dV_0 + \int_{S_0} \mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{u} dS_0 = 0 \tag{5.8}$$

V prípade že vonkajšie sily sú závislé od deformácie, treba ich definovať na aktuálnej konfigurácii a transformovať na začiatočnú podľa transformačných vzťahov pre dV a dS [D3].

V totálnej Lagrangeovej formulácii sa teda využíva princíp virtuálnych posunutí v tvare

$$\delta W = \delta W_{\mathrm{int}} - \delta W_{ext} = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 - \int_{S_0} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS_0 = 0 \tag{5.9}$$

a deformačný pohyb materiálových bodov telesa je určovaný poľom posunutí $\mathbf{u}(\mathbf{X},t)$, kde pri stacionárnych úlohách čas t je len formálnou mierou iteračného procesu riešenia úlohy a vektor $\mathbf{X}$ obsahuje známe súradnice bodov nemennej začiatočnej konfigurácie. Aktuálna konfigurácia (poloha bodov po deformácii) sa určuje zo vzťahu

$$\mathbf{x}(\mathbf{X},t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X},t) \tag{5.10}$$

Prvým krokom úpravy (5.9) pre využitie v deformačnom variante MKP je vyjadrenie $\delta\mathbf{E}$ a $\mathbf{S}$ pomocou $\mathbf{u}$ a $\delta\mathbf{u}$, čo nakoniec povedie k sústave rovníc, kde primárnymi neznámymi budú zložky posunutia $\mathbf{u}$. O Green-Lagrangeovom tenzore deformácie $\mathbf{E}$ z [D3] vieme, že platí

$$2\mathbf{E} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I} = (\mathbf{I}+\mathbf{D})^T(\mathbf{I}+\mathbf{D}) - \mathbf{I} \tag{5.11}$$

a z toho

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T\right) + \frac{1}{2}\mathbf{D}^T\mathbf{D} \tag{5.12}$$

pričom

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

Virtuálna zmena $\delta\mathbf{E}$, v ktorej $\mathbf{E}$ je funkciou $\mathbf{u}$, sa musí urobiť s ohľadom na to, že $\mathbf{u}$, ako vidieť z (5.10), je zviazané s deformačným pohybom bodu telesa. Z (5.12) dostávame

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\delta\mathbf{D} + \delta\mathbf{D}^T\right) + \frac{1}{2}\mathbf{D}^T\delta\mathbf{D} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{D}^T\mathbf{D} \tag{5.14}$$

pretože $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{D}$, platí tiež

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\delta\mathbf{D} + \delta\mathbf{D}^T\mathbf{F}\right) \tag{5.15}$$

kde podľa (5.13)

$$\delta\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial X_1} & \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial X_2} & \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial X_3} \\ \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial X_1} & \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial X_2} & \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial X_3} \\ \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial X_1} & \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial X_2} & \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial X_3} \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

V (5.14) sme uvažovali veľmi malé virtuálne zmeny $\delta\mathbf{u}$ a zanedbali sme nelineárny člen $\frac{1}{2}\delta\mathbf{D}^T\delta\mathbf{D}$; výsledok je vlastne *smerová derivácia* (directional derivative) $\mathbf{E}$ v smere $\mathbf{u}$, ktorú možno využiť v procese iteračného riešenia úlohy pomocou Newton-Raphsonovej metódy (pozri dole poznámku).

Ak je teleso v rovnováhe, potom aj každá jeho časť musí byť v rovnováhe. Po rozdelení telesa na konečné prvky, potom uvedené vzťahy platia aj pre všeobecný e-tý konečný prvok. Jeho *tangenciálnu maticu tuhosti* možno určiť [2] z diferenciálu vnútornej virtuálnej energie (5.7)

$$d(\delta W_{\mathrm{int}})_e = \int_{V_e} d\mathbf{S} : \delta\mathbf{E} + \mathbf{S} : d(\delta\mathbf{E}) dV_e \tag{5.17}$$

kde z (5.14) dostávame

$$d(\delta\mathbf{E})=\tfrac{1}{2}\left(d\mathbf{D}^T\delta\mathbf{D}+\delta\mathbf{D}^T d\mathbf{D}\right) \tag{5.18}$$

A na záver ešte uplatnime v (5.17) konštitutívnu rovnicu (vzťah medzi deformáciou a napätím) v tvare

$$d\mathbb{S}=\mathbb{D}:d\mathbf{E} \qquad \rightarrow \qquad dS_{ij}=D_{ijkl}dE_{kl} \tag{5.19}$$

kde $\mathbb{D}$ je materiálový tenzor 4. rádu a dostaneme

$$d(\delta W_{\text{int}})_e=\int_{V_e}\delta\mathbf{E}:\mathbb{D}:d\mathbf{E}+\mathbb{S}:\left(\delta\mathbf{D}^T d\mathbf{D}\right)dV_e \tag{5.20}$$

Pomocou uvedených vzťahov sme v [2] riešili rovinnú napätosť telesa z izotropného lineárne elastického materiálu s uvažovaním veľkých rotácií a posunutí. Explicitné vzťahy pre izoparametické 8 a 9 uzlové prvky sme algoritmicky spracovali a zabudovali do fortranovského programu NELMKP, ktorý je v práci uvedený v zdrojovom tvare.

Poznámka

Smerová derivácia nelineárnej funkcie (nelineárneho funkcionálu, tenzora a pod.) poskytuje linearizovaný prírastok takejto funkcie v smere premennej, v našom prípade v smere vektora virtuálneho posunutia $\delta\mathbf{u}$.

Ak využijeme vzťahy z [D3]

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},t)=\nabla\phi(\mathbf{X},t); \qquad \mathbf{D}=\nabla\mathbf{u}(\mathbf{X},t); \qquad \mathbf{E}=\tfrac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F}-\mathbf{I}\right)$$

potom smerová derivácia $\mathbf{F}$ v smere $\mathbf{u}$ je

$$D\mathbf{F}(\phi)[\delta\mathbf{u}]=\frac{d}{d\varepsilon}\left[\nabla\left(\phi+\varepsilon(\delta\mathbf{u})\right)\right]_{\varepsilon=0}=\nabla(\delta\mathbf{u})=\delta\mathbf{D}$$

Smerová derivácia Green-Lagrangeovho tenzora deformácie v smere $\mathbf{u}$ potom je

$$D\mathbf{E}[\delta\mathbf{u}]=\tfrac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T D\mathbf{F}[\delta\mathbf{u}]+D\mathbf{F}^T[\delta\mathbf{u}]\mathbf{F}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\delta\mathbf{D}+\delta\mathbf{D}^T\mathbf{F}\right)$$

čo súhlasí s (5.15).