

D6. Matice nelineárneho prútového prvku

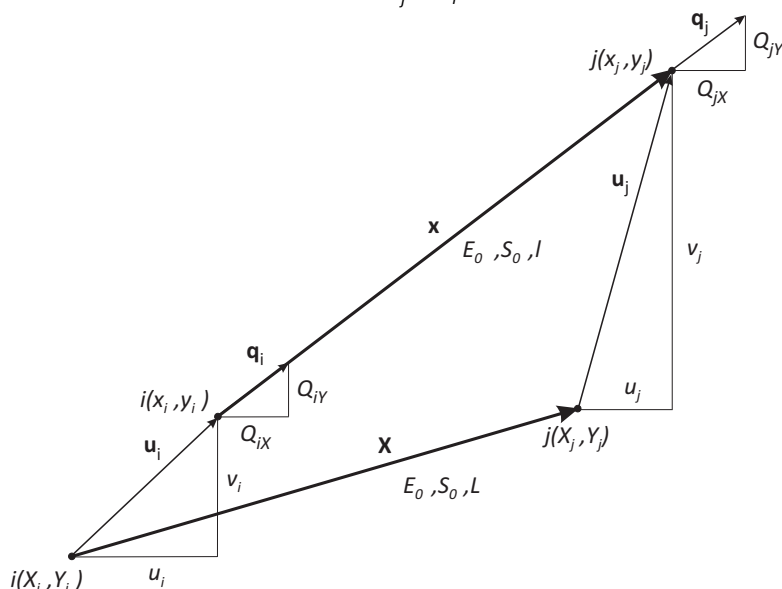
V kapitole 7 práce [2] sme sa zaoberali rovinným prútovým prvkom pre veľké posunutia a rotácie. Uviedli sme, že pre prúty (prútové konečné prvky) s *konštantnou hodnotou pomernej deformácie* po ich dĺžke je tvorba matíc prvku pomerne jednoduchá, pretože nie je nutné vyjadrovať posunutie ani deformáciu všeobecného bodu prúta. V takomto prípade sa deformácia vyjadruje pomocou súradníc a posunutí koncových bodov prúta. Možno tiež zaviesť predpoklad (aproximáciu) o nemennosti prierezu prúta a modulu pružnosti počas deformácie a integrály vykonávať po začiatočnom objeme, resp. po začiatočnej dĺžke prúta. Dokumentovali sme to na tvorbe matíc rovinného prútového prvku vhodného na riešenie úloh s veľkými posunutiami a rotáciami a *malými deformáciami*. Použili sme Greenovu mierku deformácie a pre určenie matíc prvku sme využili *princíp minima celkovej energie* prúta. Voľba Greenovej deformácie formuláciu zjednodušila natoľko, že členy matíc prvku sa dali vyjadriť explicitne pomocou všeobecných parametrov prvku.

Vychádzajúc z práce [Lit1] odvodíme teraz základné matice takéhoto prvku pomocou vektorového počtu s využitím *princípu virtuálnych posunutí*. Je to elegantný, i keď trochu menej názorný postup, ktorým možno súčasne vytvoriť matice rovinného i priestorového prvku.

Vektor vnútorných uzlových síl prvku

Uvažujme tesne vedľa uzlov vyrezaný ľubovoľný prvok *rovinnej* prútovej konštrukcie (obr. 6.1), ktorého dĺžka je v začiatočnej (nezaťaženej) polohe určená veľkosťou vektora

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i \quad (6.1)$$



Obr. 6.1

kde

$$\mathbf{X}_i = [X_i \ Y_i]^T, \quad \mathbf{X}_j = [X_j \ Y_j]^T \quad (6.2)$$

a kvadrát dĺžky prúta je

$$L^2 = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \quad (6.3)$$

Pre vektor \mathbf{x} , udávajúci dĺžku prúta po zaťažení, platí

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (6.4)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (6.5)$$

takže kvadrát dĺžky prúta sa účinkom zaťaženia zmenil na

$$\ell^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (\mathbf{X} + \mathbf{u})^T (\mathbf{X} + \mathbf{u}) \quad (6.6)$$

Teraz už môžeme vyjadriť deformáciu prúta pomocou ľubovoľnej z používaných jednorozmerných mierok (kap. 6 [2]); kvôli jednoduchosti zvolíme Greenovu mierku

$$\varepsilon_G = \frac{\ell^2 - L^2}{2L^2} = \frac{1}{L^2} \left(\mathbf{X}^T \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{u} \right) = \frac{1}{L^2} \left(\mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \right)^T \mathbf{u} = \frac{1}{2L^2} (\mathbf{X} + \mathbf{x})^T \mathbf{u} \quad (6.7)$$

ktorej variácia je

$$\delta \varepsilon_G = \frac{1}{L^2} (\mathbf{X} + \mathbf{u})^T \delta \mathbf{u} = \frac{1}{L^2} \mathbf{x}^T \delta \mathbf{u} \quad (6.8)$$

Prút je mysleným rezom vyrezaný zo sústavy tesne vedľa uzlov a jeho rovnovážny stav po zaťažení zabezpečujú vnútorné uzlové sily \mathbf{q}_i a \mathbf{q}_j (ktoré sa v tomto prípade chovajú ako vonkajšie koncové sily prúta - pozri obr. 6.1) a pre jeho rovnováhu platí *princíp virtuálnych posunutí*

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = \int_0^\ell N \delta \varepsilon_G d\ell - \mathbf{q}_i^T \delta \mathbf{u}_i - \mathbf{q}_j^T \delta \mathbf{u}_j = 0 \quad (6.9)$$

Pretože riešime úlohu s malými deformáciami možno v (6.9) integrovať po začiatkovej dĺžke prúta L a po dosadení $\delta \varepsilon_G$ zo (6.8) dostávame

$$\delta W = \int_0^L \frac{1}{L^2} (N \mathbf{x}^T) (\delta \mathbf{u}_j - \delta \mathbf{u}_i) dL - \mathbf{q}_i^T \delta \mathbf{u}_i - \mathbf{q}_j^T \delta \mathbf{u}_j = 0 \quad (6.10)$$

Transponovanie tejto rovnice a úprava dáva

$$\delta W = \delta \mathbf{u}_i^T \left(- \int_0^L \frac{1}{L^2} N \mathbf{x} dL - \mathbf{q}_i \right) + \delta \mathbf{u}_j^T \left(\int_0^L \frac{1}{L^2} N \mathbf{x} dL - \mathbf{q}_j \right) = 0 \quad (6.11)$$

Po vhodnej voľbe virtuálnych posunutí (jednotkové a nulové) a vyjadrení integrálov dostaneme dve rovnice

$$\mathbf{q}_i = -N \frac{\mathbf{x}}{L} = -N \frac{\ell}{L} \mathbf{n}, \quad \mathbf{q}_j = N \frac{\mathbf{x}}{L} = N \frac{\ell}{L} \mathbf{n} \quad (6.12)$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor v smere prúta v aktuálnej (zaťaženej) polohe. Osová sila v smere prúta pri použití Greenovej deformácie takto je

$$N_G = N \frac{\ell}{L} \quad (6.13)$$

Skreslenie sily N vyvolané pomerom ℓ/L je pri úlohách s malou deformáciou zanedbateľne malé

Ak pre lineárne elastický materiál zvolíme jednoduchú konštitutívnu rovnicu

$$N = E_0 S_0 \varepsilon_G \quad (6.14)$$

potom pre vnútorné uzlové sily prúta podľa (6.12) platí

$$\mathbf{q}_i = -E_0 S_0 \varepsilon_G \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{q}_j = E_0 S_0 \varepsilon_G \frac{\mathbf{x}}{L} \quad (6.15)$$

Po dosadení za ε_G a \mathbf{x} by sa názorne ukázala nelineárna závislosť zložiek týchto síl od zložiek posunutia.

Pravda, v MKP sa pracuje s kompletnými vektormi (stĺpcovými maticami) prvku

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

kde uzlové vektory sú jedno, dvoj, alebo trojčlenné, podľa toho, či sa prvok využíva v jedno, dvoj, alebo trojrozmernej úlohe. Doteraz odvodené vzťahy možno využiť aj s týmito vektormi pomocou matice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matica 2x2 pri rovinnom prúte a 3x3 pri priestorovom prúte. Aplikáciou tejto matice v (6.3), (6.7) a (6.15) dostaneme

$$L_e^2 = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X}_e^T \mathbf{P} \mathbf{X}_e \quad (6.18)$$

$$\varepsilon_G^e = \frac{1}{2L_e^2} (\mathbf{X}_e + \mathbf{x}_e)^T \mathbf{P} \mathbf{u}_e \quad (6.19)$$

a nakoniec vektor vnútorných uzlových síl prvku vyjadrený pomocou priestorových (aktuálnych) súradníc

$$\mathbf{q}_{akt}^e = \frac{E_e S_e \varepsilon_G^e}{L_e} \mathbf{P} \mathbf{x}_e \quad (6.20)$$

a pomocou materiálových (začiatočných) súradníc

$$\mathbf{q}_e = \frac{E_e S_e \varepsilon_G^e}{L_e} \mathbf{P} (\mathbf{X}_e + \mathbf{u}_e) \quad (6.21)$$

Tangenciálna matica tuhosti prvku

Tangenciálnu maticu tuhosti prvku vyjadríme ako vzťah medzi diferenciálnym prírastkom posunutia prvku $d\mathbf{u} = d(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)$ a diferenciálnym prírastkom vektora vnútorných uzlových síl $d\mathbf{q}$. Podľa (6.14) a (6.15) dostávame

$$d\mathbf{q}_i = -\mathbf{x} \frac{dN}{L} - \frac{N}{L} d\mathbf{x} = -\left(\frac{\mathbf{x}}{L} \frac{dN}{d\mathbf{u}} + \frac{N}{L} \mathbf{I} \right) d(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \quad (6.22)$$

$$d\mathbf{q}_j = -d\mathbf{q}_i \quad (6.23)$$

a pre deriváciu N podľa zložiek \mathbf{u} s ohľadom na (6.14) a (6.7)

$$\frac{dN}{d\mathbf{u}} = E_e S_e \frac{d\varepsilon_G^e}{d\mathbf{u}} = \frac{E_e S_e}{L_e^2} (\mathbf{X}^T + \mathbf{u}^T) = \frac{E_e S_e}{L_e^2} \mathbf{x}^T \quad (6.24)$$

Po dosadení tohto výrazu do (6.22) a (6.23) dostávame výsledok

$$d\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} d\mathbf{q}_i \\ d\mathbf{q}_j \end{bmatrix} = \left(\frac{E_e S_e}{L_e^3} \begin{bmatrix} \mathbf{x}\mathbf{x}^T & -\mathbf{x}\mathbf{x}^T \\ -\mathbf{x}\mathbf{x}^T & \mathbf{x}\mathbf{x}^T \end{bmatrix} + \frac{N}{L} \mathbf{P} \right) \begin{bmatrix} d\mathbf{u}_i \\ d\mathbf{u}_j \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{akt}^e d\mathbf{u}_e \quad (6.25)$$

kde \mathbf{K}_{akt}^e je tangenciálna matica prvku vyjadrená pomocou priestorových (aktuálnych) súradníc prvku (6.4), pričom prvá matica v tomto vzťahu sa nazýva matica materiálovej tuhosti a druhá je matica geometrickej tuhosti.

Maticu tuhosti prvku vyjadrenú pomocou materiálových (začiatočných) súradníc dostaneme, keď do (6.25) dosadíme (6.4)

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_0^e + \mathbf{K}_u^e + \mathbf{K}_\sigma^e \quad (6.26)$$

Je zložená z lineárnej matice tuhosti

$$\mathbf{K}_0^e = \frac{E_e S_e}{L_e^3} \begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{X}^T & -\mathbf{X}\mathbf{X}^T \\ -\mathbf{X}\mathbf{X}^T & \mathbf{X}\mathbf{X}^T \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

matice tuhosti začiatočného posunutia

$$\mathbf{K}_u^e = \frac{E_e S_e}{L_e^3} \begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{u}^T + \mathbf{u}\mathbf{X}^T + \mathbf{u}\mathbf{u}^T & -(\mathbf{X}\mathbf{u}^T + \mathbf{u}\mathbf{X}^T + \mathbf{u}\mathbf{u}^T) \\ -(\mathbf{X}\mathbf{u}^T + \mathbf{u}\mathbf{X}^T + \mathbf{u}\mathbf{u}^T) & \mathbf{X}\mathbf{u}^T + \mathbf{u}\mathbf{X}^T + \mathbf{u}\mathbf{u}^T \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

matice tuhosti začiatočného napätia

$$\mathbf{K}_\sigma^e = \frac{N_e}{L_e} \mathbf{P} = \frac{N_e}{L_e} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Matica \mathbf{K}^e sa využíva pri tzv. totálnej Lagrangeovskej formulácii a riešení prútových konštrukcií pomocou MKP.

Totálna a aktualizovaná Lagrangeovská formulácia

Pri numerickej analýze nelineárnych úloh pomocou MKP sa vonkajšie zaťaženie obyčajne rozdelí na časti a úloha sa rieši vo viacerých zaťažovacích krokoch. Dôvodom je buď to, že vonkajšie zaťaženie má nelineárny priebeh, alebo situácia, kedy iteračná procedúra nie je schopná s plným zaťažením konvergovať v jednom

zaťažovacom kroku. Pri Lagrangeovom popise nelineárneho deformačného pohybu telesa sa v takomto prípade využívajú dve základné formulácie na určenie jeho deformačného a napätového stavu:

- totálna Lagrangeovská formulácia (TLF)
- aktualizovaná (updated) Lagrangeovská formulácia (ULF)

V oboch formuláciách sa pri aktuálnom zťažovacom kroku využíva vzťažná (známa) konfigurácia. Pri TLF všetky veličiny (posunutia, sily, napätia) sa vyjadrujú pomocou *začiatocnej* nemennej konfigurácie a mierami deformácie a napätia sú najčastejšie Green-Lagrangeov tenzor deformácie a druhé Piola-Kirchhoffovo napätie. Pri ULF sa v aktuálnom zaťažovacom kroku upravuje *geometria z predchádzajúceho kroku*, ktorá potom slúži ako vzťažná konfigurácia pre ďalší zaťažovací krok. Pretože takto pri ULF je vzťažná konfigurácia zdeformovaná, miery deformácie a napätia sú logaritmická alebo Almansiho deformácia a Cauchyho napätie. Obe metódy výpočtu majú svoje výhody i nevýhody a voľba formulácie závisí od typu úlohy a použitého materiálového modelu.

Riešenie nelineárnej prútovej sústavy pomocou totálnej Lagrangeovskej formulácie

Princíp TLF si ukážeme na príklade numerického riešenia jednoduchej geometricky nelineárnej prútovej sústavy s veľkými posunutiami a rotáciami, ale malými deformáciami. Pre potreby programovania vyjadríme najprv explicitne vektor vnútorných uzlových síl a tangenciálnu maticu ľubovoľného prvku rovinatej prútovej konštrukcie, ktorý sa v nezaťaženom stave nachádza v začiatocnej (referenčnej) konfigurácii určenej súradnicami uzlových bodov i a j (obr 6.1). Po zaťažení sa prút dostane do aktuálnej polohy a zložky posunutí uzlových bodov, ktoré vzniknú pri tomto premiestnení, usporiadame do vektora

$$\mathbf{u}_e = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j]^T \quad (6.30)$$

Ak zavedieme $X_{ji} = X_j - X_i$, $Y_{ji} = Y_j - Y_i$, $u_{ji} = u_j - u_i$, $v_{ji} = v_j - v_i$, potom pre kvadráty dĺžok nezaťaženého a zaťaženého prúta platí

$$L_e^2 = X_{ji}^2 + Y_{ji}^2$$

$$l_e^2 = (X_{ji} + u_{ji})^2 + (Y_{ji} + v_{ji})^2$$

Zo zmeny dĺžky prúta možno vyjadriť Greenovo pomerné predĺženie prúta v aktuálnej polohe

$$\varepsilon_G^e = \frac{l_e^2 - L_e^2}{2L_e^2} \quad (6.31)$$

Zo (6.21) dostávame vektor vnútorných uslových síl prvku

$$\mathbf{q}_e = \frac{E_e S_e \varepsilon_G^e}{L_e} \mathbf{P}(\mathbf{X}_e + \mathbf{u}_e) = \frac{E_e S_e \varepsilon_G^e}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i + u_i \\ Y_i + v_i \\ X_j + u_j \\ Y_j + v_j \end{bmatrix} = S_e \sigma_G^e \begin{bmatrix} -k_x \\ -k_y \\ k_x \\ k_y \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

kde $k_x = (X_{ji} + u_{ji})/L_e$, $k_y = (Y_{ji} + v_{ji})/L_e$ a vzhľadom na malé deformácie sme pre napätie prúta zaviedli $\sigma_G^e = E_e \varepsilon_G^e$.

Tangenciálnu maticu prvku a jej časti možno vyjadriť zo vzťahov (6.26) až (6.29)

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_0^e + \mathbf{K}_u^e + \mathbf{K}_\sigma^e = \frac{E_e S_e}{L_e^3} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{A} \\ -\mathbf{A} & \mathbf{A} \end{bmatrix} + \frac{E_e S_e}{L_e^3} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{B} \end{bmatrix} + \frac{S_e \sigma_G^e}{L_e} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

kde

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} X_{ji} \\ Y_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{ji} & Y_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ji}^2 & X_{ji}Y_{ji} \\ X_{ji}Y_{ji} & Y_{ji}^2 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{u}^T + \mathbf{u}\mathbf{X}^T + \mathbf{u}\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} 2X_{ji}u_{ji} + u_{ji}^2 & X_{ji}v_{ji} + Y_{ji}u_{ji} + u_{ji}v_{ji} \\ X_{ji}v_{ji} + Y_{ji}u_{ji} + u_{ji}v_{ji} & 2Y_{ji}v_{ji} + v_{ji}^2 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

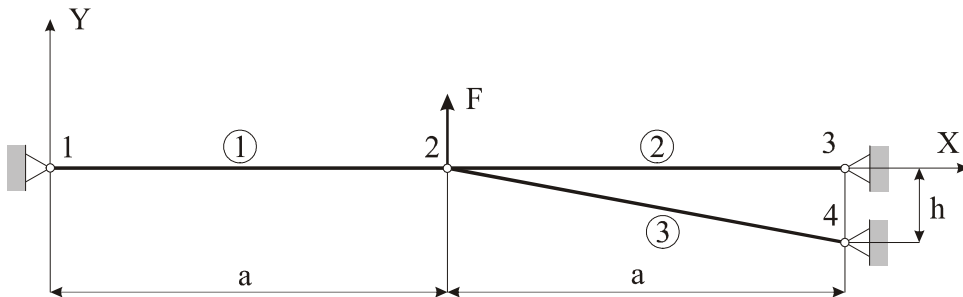
Pri TLF nie je potrebné vyčleňovať z materiálovej matice prvku maticu začiatočných posunutí a platí

$$\mathbf{K}_M^e = \mathbf{K}_0^e + \mathbf{K}_u^e = \frac{E_e S_e}{L_e^3} \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} & -(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ -(\mathbf{A} + \mathbf{B}) & \mathbf{A} + \mathbf{B} \end{bmatrix} = \frac{E_e S_e}{L_e} \begin{bmatrix} k_x^2 & k_x k_y & -k_x^2 & -k_x k_y \\ k_x k_y & k_y^2 & -k_x k_y & -k_y^2 \\ -k_x^2 & -k_x k_y & k_x^2 & k_x k_y \\ -k_x k_y & -k_y^2 & k_x k_y & k_y^2 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Výpočet prútovej sústavy v programovom prostredí Mathematica

Ovodenie vektora vnútorných uzlových síl a tangenciálnej matice elementu už umožňuje vytvorenie nelineárneho programu MKP pre riešenie telies tvorených z takýchto prvkov. Vo zvolenom programovacom prostredí je to už len otázka algoritimizácie a programovania. V [2] sme prvok zaradili do fortranovského programu NELMKP, tu ho využijeme na tvorbu jednoduchého programu v programovacom prostredí bežne prístupného systému Mathematica. Základ programu aj príklad preberáme z [2], ale program sme upravili pre prácu s viacerými zaťažujúcimi krokmi kvôli demonštrácii totálnej Lagrangeovskej formulácie.

Pre prútovú sústavu na obr. 6.2 treba určiť posunutie pôsobiska sily F a veľkosť síl v prútoch, keď je dané $a = 1000$ mm, $h = 50$ mm. Materiál a prierezy prútov sú rovnaké s hodnotami $E = 200000$ MPa, $S = 100$ mm². Úlohu treba riešiť a výsledky vypísať v jednom behu pre hodnoty sily $F = 2000, 3000$ a 4000 N. V programe treba použiť totálnu Lagrangeovskú formuláciu.



Obr. 6.2

Program na riešenie úlohy a vypočítané výsledky

```
(* PODPROGRAMY/FUNKCIE PROGRAMU *)

(*Vektor vnútorných uzlových síl telesa/konštrukcie*)
VektorVnutUzlsil[a_,h_,c_,d_,E0_,S0_,u_,v_,print_] := Module[{q},
q=Table[0,{2},{1}];
qe1=Vektorqe[0,0,a,0,0,0,u+c,v+d,E0,S0,print,1];
q=AdiciaVnutUzlsil[qe1,{0,0,1,2},q];
qe2=Vektorqe[a,0,2a,0,u+c,v+d,0,0,E0,S0,print,2];
q=AdiciaVnutUzlsil[qe2,{1,2,0,0},q];
qe3=Vektorqe[a,0,2a,-h,u+c,v+d,0,0,E0,S0,print,3];
q=AdiciaVnutUzlsil[qe3,{1,2,0,0},q];
Return[q];

(*Vektor vnútorných uzlových síl prvku*)
Vektorqe[xi_,yi_,xj_,yj_,ui_,vi_,uj_,vj_,E0_,S0_,print_,el_] :=
Module[{xji,yji,uji,vji,L0,L,kx,ky,qe},
xji=xj-xi;yji=yj-yi;uji=uj-ui;vji=vj-vi;
L=Sqrt[(xji+uji)^2+(yji+vji)^2];L0=Sqrt[xji^2+yji^2];
eG=(L^2-L0^2)/(2*L0^2);
sigG = E0*eG;
If[print==1,Print["NG" el," = ", S0*sigG, " n"]];
kx=(xji+uji)/L0;ky=(yji+vji)/L0;
qe=S0*sigG*{{-kx},{-ky},{kx},{ky}};
Return[qe];
```

```

(*Príspevok prvku do vektora vnútorných uzlových síl telesa/konštrukcie*)
AdíciaVnúťUzlSíl[pe_,kod_,p_]:=Module[{i,ii,neldof,q},q=p;
neldof=Dimensions[kod][[1]];
For[i=1,i≤neldof,i++,ii=kod[[i]];
If[ii>0,q[[ii,1]]+=pe[[i,1]]];
Return[q]];

(*Tangenciálna matica telesa/konštrukcie*)
TangMatTelesa[a_,h_,c_,d_,E0_,S0_,u_,v_]:=
Module[{Ke1,Ke2,Ke3,K},K=Table[0,{2},{2}];
Ke1=TangMatPrvku[0,0,a,0,0,0,u+c,v+d,E0,S0];
K=AdíciaMaticPrvku[Ke1,{0,0,1,2},K];
Ke2=TangMatPrvku[a,0,2a,0,u+c,v+d,0,0,E0,S0];
K=AdíciaMaticPrvku[Ke2,{1,2,0,0},K];
Ke3=TangMatPrvku[a,0,2a,-h,u+c,v+d,0,0,E0,S0];
K=AdíciaMaticPrvku[Ke3,{1,2,0,0},K];
Return[K]];

(*Tangenciálna matica prvku*)
TangMatPrvku[xi_,yi_,xj_,yj_,ui_,vi_,uj_,vj_,E0_,S0_]:=
Module[{xji,yji,uji,vji,L0,L,kx,ky},
xji=xj-xi;yji=yj-yi;uji=uj-ui;vj=vj-vi;
L=Sqrt[(xji+uji)^2+(yji+vji)^2];L0=Sqrt[xji^2+yji^2];
eG=(L^2-L0^2)/(2*L0^2);
sigG= E0*eG;
kx=(xji+uji)/L0;ky=(yji+vji)/L0;
konst=E0*S0/L0^3;
KeMat=((E0*S0)/L0)*{{kx*kx, kx*ky, -(kx*kx), -(kx*ky)},
{kx*ky, ky*ky, -(ky*kx), -(ky*ky)},
{-(kx*kx), -(ky*kx), kx*kx, ky*kx},
{-(kx*ky), -(ky*ky), ky*kx, ky*ky}};
KeGeo=((S0*sigG)/L0)*{{1,0,-1,0},
{0,1,0,-1},
{-1,0,1,0},
{0,-1,0,1}};
KeTang=KeMat+KeGeo;
Return[KeTang];];

(*Príspevok prvku do tangenciálnej matice telesa/konštrukcie*)
AdíciaMaticPrvku[KeTang_,kod_,Km_]:=
Module[{i,j,ii,jj,NVE,K},K=Km;
NVE=Length[kod];
For[i=1,i≤NVE,i++,ii=kod[[i]];
For[j=i,j≤NVE,j++,jj=kod[[j]];
If[ii>0&&jj>0,K[[jj,ii]]=K[[ii,jj]]+=KeTang[[i,j]]];];
Return[K]];

(*Iteračné riešenie sústavy nelineárnych rovníc Newton-Raphsonovou metódou*)
NewtonRaphson[u0_,tol_,max_]:=Module[{norma=1,i=0},
ux={u0[[1]],u0[[2]]};
Ktang[{u_,v_}]=K;
While[And[i<max,norma>tol],
u1=ux-(Inverse[Ktang[ux]]).R[ux];
norma=Sqrt[(u1-ux).(u1-ux)];
ux=u1;
i=i+1;]
Print[" Počet iterácií = ",i-1];
Print[" Výsledný vektor nerovnovážnych síl R",i-1," = ",R[ux]];
Print[" Prírastok posunutí U",i-1," = ",ux]; ];

```

```

(* VLASTNÝ NUMERICKÝ VÝPOČET *)
F=0; a=1000; h=50; E0=200000; S=100;
ΔF[1]=2000;
ΔF[2]=1000;
ΔF[3]=1000;
U[1]=0;
V[1]=0;
Print["VÝSLEDKY VYPOČTU"];
(* Cyklus s tromi zatažujúcimi krokmi *)
For[i=1,i<4,
  Print["krok = ",i];
  F=F+ΔF[i];
  q=VektorVnutUzlSí1[a,h,U[i],V[i],E0,S,u,v,0];
  R[{u_,v_}]={q[[1]][[1]],q[[2]][[1]]-F};
  K=TangMatTelesa[a,h,U[i],V[i],E0,S,u,v];
  Iterácia=NewtonRaphson[{0.,0.},0.001,30];
  U[i+1]=U[i]+u1[[1]];
  V[i+1]=V[i]+u1[[2]];
  Print[" Výsledné zložky posunutia voľného uzla a sily v prútoch"];
  Print["      U = ",U[i+1]," mm","      V = ",V[i+1]," mm"];
  q=VektorVnutUzlSí1[a,h,U[i],V[i],E0,S,u1[[1]],u1[[2]],1];
  i++];

```

VÝSLEDKY VYPOČTU

krok = 1

Počet iterácií = 5

Výsledný vektor nerovnovážnych síl **R** 5 =
 -6.72658×10^{-6} , 2.35265×10^{-6}

Prírastok posunutí **U** 5 = {0.542913,25.9424}

Výsledné zložky posunutia voľného uzla a sily v prútoch

U = 0.542913 mm V = 25.9424 mm

NG1 = 17591.3 N

NG2 = -4125.22 N

NG3 = 21762.8 N

krok = 2

Počet iterácií = 3

Výsledný vektor nerovnovážnych síl **R** 3 =
 2.54659×10^{-10} , 1.5109×10^{-10}

Prírastok posunutí **U** 3 = {0.164869,6.27864}

Výsledné zložky posunutia voľného uzla a sily v prútoch

U = 0.707782 mm V = 32.2211 mm

NG1 = 24542.6 N

NG2 = -3768.66 N

NG3 = 28381.4 N

krok = 3

Počet iterácií = 3

Výsledný vektor nerovnovážnych síl **R** 3 =
 3.79077×10^{-9} , -2.06683×10^{-10}

Prírastok posunutí **U** 3 = {0.141086,5.01706}

Výsledné zložky posunutia voľného uzla a sily v prútoch

U = 0.848868 mm V = 37.2381 mm

NG1 = 30851.3 N

NG2 = -3103.38 N

NG3 = 34049.6 N

Bližšie informácie o programe i príklade možno nájsť v [2]. Tu uvádzame len niekoľko základných poznámok. Predovšetkým si treba všimnúť výkonnú časť programu s názvom VLASTNÝ NUMERICKÝ VÝPOČET. Všetko

predtým sú funkcie programu, ktoré sú volané so zadanými hodnotami z tejto časti. Po zadaní vstupných hodnôt sa rozbehne cyklus troch zaťažovacích krokov. V prvom cykle so silou $F = 2000$ N sa vytvoria vzťahy pre globálny vektor vnútorných uzlových síl \mathbf{q} a globálnu maticu tuhosti \mathbf{K} s neznámymi zložkami posunutiami voľného uzla u a v . Zavolaním funkcie *NewtonRaphson* so začiatočnými nulovými hodnotami u a v sa rozbehne Newton-Raphsonova iterácia a vypočítajú sa a vypíšu *prírastky* u a v pre prvé zaťaženie $F = 2000$ N. Zavolaním funkcie pre výpočet \mathbf{q} s týmito hodnotami sa vypočítajú a vypíšu sily v prútoch pre prvé zaťaženie. Potom sa cyklus opakuje s novou hodnotou sily F , ale vo vektore \mathbf{q} , vektore nerovnovážnych uzlových síl \mathbf{R} a matici \mathbf{K} sa už zohľadnia vypočítané hodnoty posunutí. Začiatočná konfigurácia prútovej sústavy (určovaná z hodnôt a a h), ako vidieť z volania funkcií \mathbf{q} a \mathbf{K} , sa pri TLF nemení. Vzhľadom na typ úlohy a malú mieru nelinearity, možno výsledok pre silu $F = 4000$ N dosiahnuť aj v jednom kroku a výsledok je rovnaký [2], čo zároveň aj potvrdzuje správnu programovú aplikáciu TLF.

Literatúra

[Lit1] Krenk, S.: Non-linear Modeling and Analysis of Solids and Structures. Cambridge University Press, 2009

[2] Benča, Š.: Riešenie nelineárnych pevnostných úloh pomocou MKP. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2009