

D7 Určenie matíc prvku priamo z diferenciálnych rovníc úlohy

Princíp Galerkinovej metódy

Analýza väčšiny úloh v technickej fyzike a v mechanike kontinua vedie na diferenciálne rovnice, ktoré treba riešiť pri určitých okrajových, prípadne i začiatočných podmienkach. Exaktné riešenie týchto rovníc pre zložitejšie tvarované telesá a oblasti nie je známe a musia sa riešiť približnými metódami, medzi ktoré patrí aj MKP. Vysvetlime si teraz na jednoduchej jednorozmernej lineárnej úlohe prechod od diferenciálnej rovnice k jej formulácii v MKP.

Uvažujme diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) + cu - f = 0 \quad \text{pre} \quad 0 < x < L \quad (7.1)$$

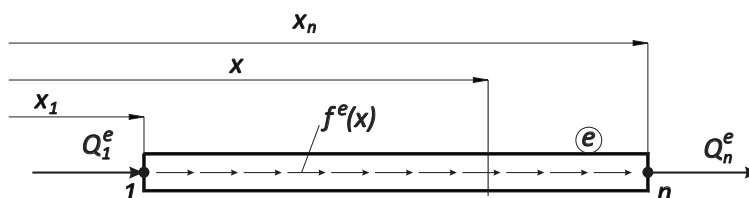
kde $a = a(x)$, $c = c(x)$, $f = f(x)$ sú vstupné dáta (t.j. známe funkcie) úlohy a $u(x)$ je funkcia, ktorú treba určiť. Vstupné dáta závisia od geometrie, materiálu a "zaťaženia" tejto jednorozmernej úlohy. S touto rovnicou sa môžeme stretnúť vo viacerých oblastiach fyziky a treba ju riešiť pri príslušných okrajových podmienkach.

Pri použití MKP sa takéto teleso, resp. oblasť, rozdelí na konečné prvky a na všeobecnom e-tom prvku (obr. 7.1) s n vyznačenými uzlovými bodmi sa hľadá *aproximácia* funkcie $u(x)$ v tvare [1]

$$u^e(x) = N_1^e(x)u_1^e + N_2^e(x)u_2^e + \dots + N_n^e(x)u_n^e = \sum_{j=1}^n N_j^e(x)u_j^e \quad (7.2)$$

kde N_i sú známe interpolačné (tvarové) funkcie prvku a u_i sú hodnoty hľadanej funkcie v tzv. uzlových bodoch (body 1 a n sú krajné body prvku, ostatné sú vhodne zvolené vo vnútri prvku). Ak toto približné riešenie dosadíme do (7.1), rovnica vo všeobecnosti nebude splnená, ľavá strana sa bude rovnať nenulovej hodnote, ktorá sa nazýva *zvyšok (rezíduum)*

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du^e(x)}{dx}\right) + cu^e(x) - f^e(x) = r^e(x, u_1^e, u_2^e, \dots, u_n^e) \neq 0 \quad (7.3)$$



Obr. 7.1

Jeden zo spôsobov, ako možno vyžadovať nulový zvyšok r na prvku, je jeho zväžené integrálne spriemerovanie pomocou n váhových lineárne nezávislých funkcií w_i

$$\int_{x_1}^{x_n} w_i^e(x) r^e(x, u_1^e, u_2^e, \dots, u_n^e) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.4)$$

čím dostaneme n algebraických rovníc na určenie hodnôt u_i . Ak za váhové funkcie $w_i^e(x)$ zoberieme tvarové funkcie $N_i^e(x)$ - v takomto prípade hovoríme o MKP založenej na Galerkinovej metóde.

Slabá forma diferenciálnej rovnice

Ak do i -tej rovnice systému (7.4) dosadíme zvyšok (7.3) dostaneme

$$\int_{x_1}^{x_n} w_i^e(x) \left[-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du^e}{dx}\right) + cu^e - f^e \right] dx = 0 \quad (7.5)$$

Aplikovaním pravidla o integrovaní per partes v tejto rovnici na jej prvý člen možno výhodne znížiť stupeň derivácie aproximačnej funkcie $u^e(x)$

$$\int_{x_1}^{x_n} \left(a \frac{dw_i^e}{dx} \frac{du^e}{dx} + cw_i^e u^e - w_i^e f^e \right) dx - \left[w_i^e a \frac{du^e}{dx} \right]_{x_1}^{x_n} = 0 \quad (7.6)$$

čím sa znížia (zoslabia) aj nároky na jej spojitosť. Rovnica (7.6) sa preto nazýva aj *slabý tvar* diferenciálnej rovnice (7.1) na elemente. V rovnici, ako vidieť, sa automaticky objavili aj prirodzené (silové, zdrojové, Neumanove) okrajové podmienky

$$\left[w_i^e a \frac{du^e}{dx} \right]_{x_1}^{x_n} = w_i^e(x_1) Q_1^e + w_i^e(x_n) Q_n^e \quad (7.7)$$

kde koeficient váhovej funkcie $a \frac{du^e}{dx} \equiv Q$ sa nazýva *sekundárna premenná* (dá sa odvodiť z primárnej premennej u), ktorej kladný zmysel sa volí podľa kladného zmyslu súradnicovej osi (obr. 7.1), čo zmenilo znamienko člena s Q_1^e v (7.7). Napr. pri pevnostnej úlohe je to osová sila, pri vedení tepla tepelný tok atď. Výsledný tvar rovnice (7.6) s uvažovaním n uzlov na prvku teda je

$$\int_{x_1}^{x_n} \left(a \frac{dw_i^e}{dx} \frac{du^e}{dx} + cw_i^e u^e \right) dx = \int_{x_1}^{x_n} w_i^e(x_j) f^e(x) dx + \sum_{j=1}^n w_j^e(x_j) Q_j^e \quad (7.8)$$

Určenie matíc prvku

Predpokladajme, že doména diferenciálnej rovnice (7.1) je rozdelená na *pevnostné* konečné prvky s rovnakým počtom n uzlových bodov a pre e -ty element máme určiť maticu tuhosti \mathbf{K}^e , vektor uzlových síl \mathbf{q}^e a vektor vonkajších uzlových síl od spojitého zaťaženia prvku \mathbf{f}^e do základnej rovnice rovnováhy prvku [1]

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{q}^e + \mathbf{f}^e \quad (7.9)$$

Postup je už teraz jednoduchý. Do (7.8) dosadíme aproximačnú funkciu $u^e(x)$ (7.2) postupne s váhovými funkciami

$$w_1^e = N_1^e, w_2^e = N_2^e, \dots, w_i^e = N_i^e, \dots, w_n^e = N_n^e$$

čím dostaneme n algebrických rovníc pre určenie n neznámych hodnôt hľadanej funkcie v uzlových bodoch

$$\mathbf{u}^e = \{u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_j \quad \dots \quad u_n\}^T \quad (7.10)$$

Všeobecná i -ta rovnica tejto sústavy má potom tvar

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_n} \left[a \frac{dN_i^e}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \frac{dN_j^e}{dx} \right) + cN_i^e \left(\sum_{j=1}^n u_j^e N_j^e \right) \right] dx &= \sum_{j=1}^n N_j^e(x_i) Q_j^e + \int_{x_1}^{x_n} N_i^e f^e(x) dx \\ \sum_{j=1}^n \int_{x_1}^{x_n} \left(a \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + cN_i^e N_j^e \right) dx \left[u_j^e \right] &= Q_i^e + f_i^e \\ \sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e &= Q_i^e + f_i^e \end{aligned} \quad (7.11)$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$ a kde ij -ty člen matice tuhosti prvku je

$$K_{ij}^e = \int_{x_1}^{x_n} \left(a \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + cN_i^e N_j^e \right) dx \quad (7.12)$$

i - ty člen vektora vonkajších prvkových síl od spojitého zaťaženia

$$f_i^e(x) = \int_{x_1}^{x_n} f(x) N_i^e dx \quad (7.13)$$

a pretože interpolačná funkcia sa vo svojom uzlovom bode rovná jednej a v ostatných je nulová v (7.11) platí

$$\sum_{j=1}^n N_j^e(x_i^e) Q_j^e = Q_i^e(x_i^e) \quad (7.14)$$

Podrobnosti o interpolačných funkciách jednorozmerného prvku $N_i^e(x_i)$ možno nájsť v bežných príručkách MKP a tiež v [1]. V lokálnom súradnicovom systéme prvku s \bar{x} (obr. 7.1) pre lineárny dvojuzlový prvok ($n = 2$) sú

$$N_1(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{\ell_e} \quad N_2(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{\ell_e} \quad (7.15)$$

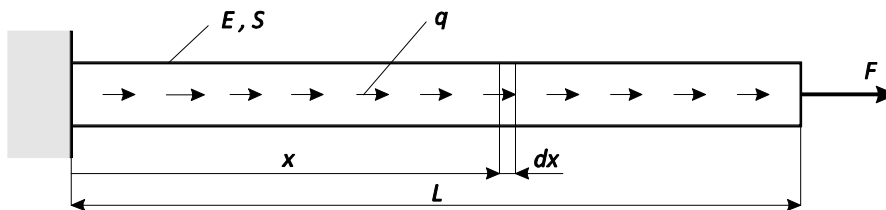
a pre kvadratický trojuzlový ($n = 3$)

$$N_1(\bar{x}) = \left(1 - \frac{2\bar{x}}{\ell_e}\right) \left(1 - \frac{\bar{x}}{\ell_e}\right) \quad N_2(\bar{x}) = \frac{4\bar{x}}{\ell_e} \left(1 - \frac{\bar{x}}{\ell_e}\right) \quad N_3(\bar{x}) = -\frac{\bar{x}}{\ell_e} \left(1 - \frac{2\bar{x}}{\ell_e}\right) \quad (7.16)$$

Matice prvku určené v lokálnom súradnicovom systéme v prípade *jednorozmernej* úlohy *platia aj pre globálny systém* so súradnicou x , pretože pri posúvaní prvku sa matice takéhoto prvku nemenia [1].

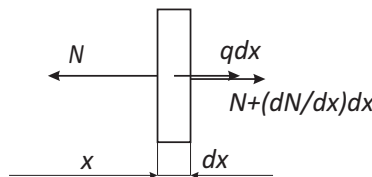
Príklad na ilustráciu postupu

K diferenciálnej rovnici (alebo rovniciam) sa vo všeobecnosti dopracujeme tak, že napíšeme rovnice rovnováhy (alebo bilančné rovnice) pre diferenciálny element vybraný myslennými rezmi z výpočtového telesa (alebo oblasti). Kvôli názornosti výkladu si rovnicu (7.1) skonkretizujeme na príklade pre jednorozmerný prút znázornený na obr. 7.2.



Obr. 7.2

Prút je zaťažený na ťah sústredenou silou F a spojitým objemovým zaťažením q (v jednotkách sila/dĺžka). Prierez je S a modul pružnosti materiálu prúta E . Z prúta myslennými rezmi vyrežeme diferenciálny element o dĺžke dx s vyznačením pôsobiacich síl (obr. 7.3).



Obr. 7.3

Zo silovej rovnováhy elementu dostávame

$$\frac{dN}{dx} + q = 0 \quad (7.17)$$

Do rovnice rovnováhy zahrnieme koštitutívnu rovnicu

$$N = ES\varepsilon \quad (7.18)$$

a vzťah medzi pomernou deformáciou ε a posunutím

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (7.19)$$

Dostaneme tak podmienku rovnováhy prvku v deformačnom tvare

$$\frac{d}{dx} \left(ES \frac{du}{dx} \right) + q = 0 \quad (7.20)$$

čo vlastne je vlastne špeciálny prípad rovnice (7.1) s $c = 0$ a $a = ES$.

Rovnica (7.20) platí pre prút na obr 7.1 so základnou (geometrickou) okrajovou podmienkou

$$u(x=0) = 0 \quad (7.21)$$

a prirodzenou (silovou) okrajovou podmienkou

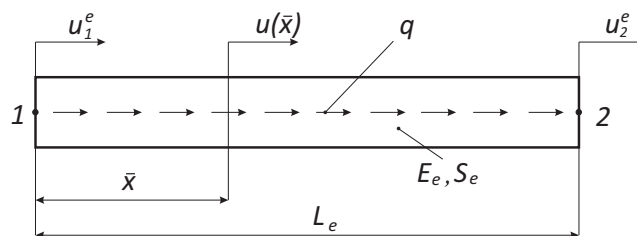
$$ES \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = F \quad (7.22)$$

Rovnica (7.20) spolu s okrajovými podmienkami (7.21) a (7.22) predstavuje *silnú formuláciu* rovnováhy prúta. Exaktné riešenie diferenciálnej rovnice je v tomto prípade jednoduché. Dvojnásobným integrovaním rovnice a vyjadrením integračných konštánt z okrajových podmienok dostaneme

$$u(x) = \frac{1}{ES} \left(Fx + \frac{qx^2}{2} \right) \quad (7.23)$$

Nájdime teraz riešenie úlohy na obr. 7.2 pomocou uvedenej formulácie MKP s jediným dvojuzlovým prvkom znázornenom na obr. 7.4. Podľa (7.2) hľadáme teda lineárnu aproximáciu funkcie posunutia prúta

$$u^e(x) = N_1^e(x)u_1^e + N_2^e(x)u_2^e \quad (7.24)$$



Obr. 7.4

Dve rovnice na určenie posunutí uzlových bodov u_1^e a u_2^e v maticovom zápise podľa (7.11) až (7.14) sú

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{Bmatrix} \quad (7.25)$$

a po vyjadrení známych členov týchto matíc

$$\frac{E_e S_e}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ F \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{Bmatrix} \quad (7.26)$$

Pretože teleso na obr. 7.2 sme sa rozhodli aproximovať len jedným prvkom, rovnice (7.26) platia aj pre celé teleso s globálnou súradnicou x a globálnymi údajmi o telese. Treba ešte do nich zahrnúť geometrickú okrajovú podmienku

$$u_1^e = 0 \quad (7.27)$$

a dostávame

$$u_2^e = \frac{1}{ES} \left(FL + \frac{qL^2}{2} \right) \quad (7.28)$$

Podľa (7.24) a (7.15) aproximačná funkcia posunutia je

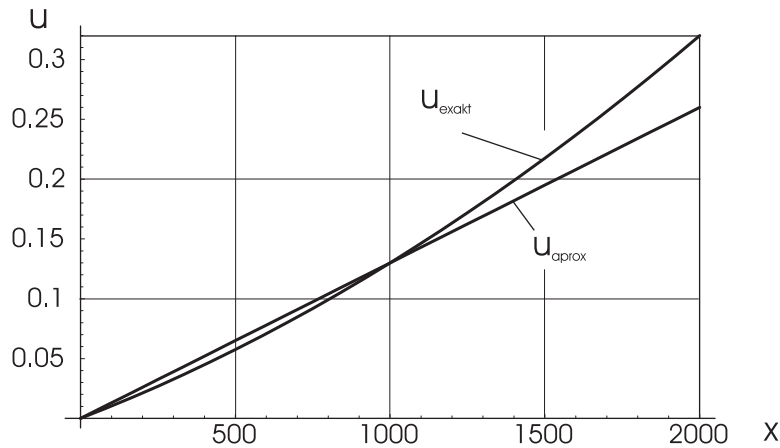
$$u(x) = \frac{1}{ES} \left(F + \frac{qL}{2} \right) x \quad (7.29)$$

Z vynechanej rovnice v (7.26) možno už teraz so známou hodnotou u_2^e určiť reakciu v upevnenom uzle a zo známych vzťahov elementárnej pružnosti aj ostatné odvodené premenné ako priebeh osovej sily, pomernej deformácie a napätia.

Porovnanie exaktnej a aproximačnej funkcie posunutia prúta pre číselné hodnoty

$$E = 200000 \text{ Nmm}^{-2}, S = 100 \text{ mm}^2, L = 2000 \text{ mm}, q = 0,6 \text{ Nmm}^{-1}, F = 2000 \text{ N}$$

uvádzame na obr. 7.5.



Obr. 7.5

Uvedený postup určenia matíc prvku úlohy definovanej diferenciálnou rovnicou, resp. sústavou (parciálnych) diferenciálnych rovníc, je všeobecný a možno ho analogicky využiť pri dvoj a trojrozmerných úlohách. Bez zmeny ho možno použiť aj pri nelineárnych úlohách s tým, že sústava rovníc pre uzlové posunutia je v takomto prípade nelineárna a na jej riešenie treba použiť iteračnú (Newton-Raphsonovu) metódu.

Poznanie matíc všeobecného prvku úlohy má v MKP prvoradáý význam, pretože ďalší postup riešenia je už rutinná záležitosť, ako po algoritmickej, tak i po programátorskej stránke [1], [2].

Nelineárna jednorozmerná diferenciálna rovnica

Diferenciálna rovnica (7.1), pre úplnosť doplnená teraz aj o člen s prvou deriváciou hľadanej funkcie, sa skomplikuje, ak udané funkcie $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ a $h(x)$ sú závislé aj od primárnej neznámej $u(x)$. Rovnica sa stane nelineárnou a má tvar

$$-\frac{d}{dx} \left[a(x,u) \frac{du}{dx} \right] + b(x,u) \frac{du}{dx} + c(x,u)u - f(x) = 0 \quad \text{pre} \quad 0 < x < L \quad (7.30)$$

s možnosťami pre voľbu dvoch okrajových podmienok

$$\pm a \frac{du}{dx} + h(x,u)(u - u_\infty) = Q \quad \text{a tiež} \quad u = u_0 \quad (7.31)$$

kde u_∞ a u_0 sú známe parametre. Znamienko plus platí pre prípad, kedy vonkajšia normála k ploške má smer pozitívnej osi x a znamienko mínus pre opačný.

Určenie matíc prvku

Ako sme už uviedli, pri MKP sa teleso (oblasť) rozdelí na určitý počet konečných prvkov a na všeobecnom e -tom prvku (obr. 7.1) s n uzlami sa hľadá *aproximácia* funkcie $u(x)$ v tvare [1]

$$u^e(x) = N_1^e(x)u_1^e + N_2^e(x)u_2^e + \dots + N_n^e(x)u_n^e = \sum_{j=1}^n N_j^e(x)u_j^e \quad (7.32)$$

kde N_j sú známe interpolačné (tvarové) funkcie prvku a u_j sú hodnoty funkcie (7.32) v uzlových bodoch (body 1 a n sú krajné body prvku, ostatné sú vhodne zvolené vo vnútri prvku). Pre určenie n neznámych koeficientov u_1^e až u_n^e možno rovnakým postupom ako v predchádzajúcej časti dostať n algebraických rovníc (ktoré už teraz, vzhľadom na charakter funkcií a , b , a c v (7.30), sú nelineárne)

$$[\mathbf{K}^e(\mathbf{u}^e)]\{\mathbf{u}^e\} = \{\mathbf{q}^e\} + \{\mathbf{f}^e\} \quad (7.33)$$

kde \mathbf{K}^e je prvková matica sústavy, \mathbf{u}^e je vektor (stĺpcová matica) hodnôt u_1^e až u_n^e prvku, \mathbf{q}^e je vektor uzlových "síl" prvku a \mathbf{f}^e je vektor uzlových "síl" od spojitého "zaťaženia" prvku.

Všeobecná i -ta rovnica sústavy (7.33) má tvar

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e = Q_i^e + f_i^e \quad (7.34)$$

kde

$$K_{ij}^e = \int_{x_1}^{x_n} \left(a(x,T) \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + b(x,T) N_i^e \frac{dN_j^e}{dx} + c(x,T) N_i^e N_j^e \right) dx + h_1 N_i^e(x_1) N_j^e(x_1) + h_n N_i^e(x_n) N_j^e(x_n) \quad (7.35)$$

a

$$f_i^e(x) = \int_{x_1}^{x_n} f(x) N_i^e dx + h_1 T_\infty^1 N_i^e(x_1) + h_n T_\infty^n N_i^e(x_n) \quad (7.36)$$

Okrajové podmienky (pre okrajové uzly okrajových prvkov) sa určujú podľa (7.31). Ak $b=0$, potom je matica \mathbf{K} symetrická, v opačnom prípade je nesymetrická. Členy s h_1 a h_n sa uplatňujú len na *okrajových* uzloch a to len vtedy, keď je tam predpísaná okrajová podmienka typu termálnej konvekcie.

Globálne matice modelu úlohy s viacerými prvkami sa v MKP vytvárajú usporiadanou sumáciou prvkových matíc. Pri nelineárnej úlohe dostaneme potom globálnu sústavu nelineárnych algebrických rovníc v tvare

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U})]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (7.37)$$

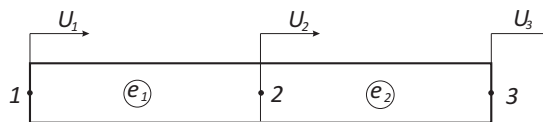
kde \mathbf{K} je globálna tangenciálna matica sústavy, \mathbf{U} je globálny vektor uzlových neznámych a

$$\{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{Q}\} + \{\mathbf{f}\} \quad (7.38)$$

je globálny vektor pravej strany sústavy. Hodnoty \mathbf{U} sa zo sústavy rovníc (7.37) určujú iteračne, najčastejšie Newton-Raphsonovou metódou [2].

Pri zostavovaní globálnych matíc sa postupuje rovnako ako pri pevnostných úlohách [1], [2]. Využívajú sa kódové čísla prvkov na programovú realizáciu súčtu tzv. *rozšírených* matíc prvkov (v ďalšom ich označíme horným pruhom). Sú to matice, ktoré sa pomocou riadkov a stĺpcov s nulami rozšíria na rovnaký rozmer ako majú globálne matice, pričom ich nenulové členy sú členy lokálnych matíc umiestnené v rozšírenej matici tak, aby pri sčítaní správne prispievali do globálnej matice.

Ukážme si tento postup na jednorozmernej úlohe s jednou neznámou v uzle. Nech sa oblasť (teleso) skladá len z dvoch *dvojuzlových* prvkov (obr. 7.6)



Obr. 7.6

takže matice $\bar{\mathbf{K}}^e$ a matica \mathbf{K} sú stupňa tri. Globálnu maticu sústavy dostaneme ako súčet rozšírených matíc prvkov (členy lokálnych matíc vyznačíme len symbolicky)

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}^{(1)} + \bar{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \# & \# \\ 0 & \# & \# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet + \# & \# \\ 0 & \# & \# \end{bmatrix}$$

Analogicky dostaneme aj globálne stĺpcové matice na pravej strane sústavy, napr.

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}^{(1)} + \bar{\mathbf{Q}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \# \\ \# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet + \# \\ \# \end{bmatrix}$$

Jednorozmerný nelineárny prenos tepla vedením a prúdením

Najjednoduchšie typy nelineárnej rovnice (7.30), vhodné na ilustračné príklady jej riešenia pomocou MKP, možno nájsť pri analýze úloh ustáleného vedenia tepla v jednorozmernom modeli telesa. Zaujímavý je aj prenos

tepla kombináciou vedenia a konvekcie (prenosu tepla prúdením okolitého média). V týchto prípadoch je primárnou neznámou *prevyšujúca* teplota

$$u \equiv T = T(x) - T_{\infty} \quad (7.39)$$

kde T_{∞} je teplota média alebo (pri čistom vedení) vzťažná teplota. Termálne vlastnosti väčšiny materiálov sú od teploty (prípadne aj jej gradientu) závislé, čo nie vždy možno zanedbať a vedie to na nelineárnu úlohu. Model telesa pri takejto úlohe delíme na *termálne* konečné prvky, pretože ich materiálové charakteristiky sú termálne (nie tuhostné, ako pri pevnostnej úlohe) a primárnou neznámou je *prevyšujúca* teplota (a nie posunutie, ako pri pevnostnej úlohe). Okrajové podmienky sa zadávajú podľa (7.31).

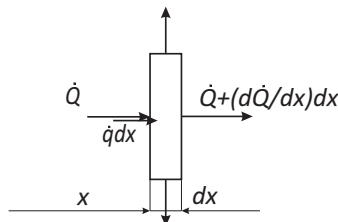
Diferenciálnu rovnicu pre konkrétnu úlohu dostaneme z tepelnej bilančnej rovnováhy diferenciálneho elementu. Typickým prípadom je prút konštantného prierezu S , ktorého dĺžka L výraznejšie prevláda nad priečnymi rozmermi. Potom možno uvažovať zmenu teploty len v smere osi x a riešiť úlohu ako jednorozmernú. Nech je takýto prút obtekaný médiom o teplote T_{∞} a nech v jeho objeme vzniká teplo (napríklad chemickou reakciou alebo prívodom) konštantnou rýchlosťou \dot{q} udanou na jednotku dĺžky. Materiál prúta má vodivosť $\lambda(T)$ a známy je aj teplotne závislý súčiniteľ prestupu tepla medzi prútom a chladiacim médiom $h(T)$. Poznáme tiež perimeter (obvod plochy S).

Z prúta vo vzdialenosti x a $x+dx$ myslennými rezmi vyrežeme diferenciálny element (obr. 7.8) s dĺžkou dx . Rýchlosť tepelného toku (množstvo tepla Q za jednotku času) vo vzdialenosti x označíme $\dot{Q} = dQ/dt$ a budeme predpokladať, že touto rýchlosťou teplo do elementu vchádza. Rýchlosť, ktorou teplo vo vzdialenosti $x+dx$ z elementu vychádza je $\dot{Q} + (d\dot{Q}/dx)dx$ (je to linearizácia funkcie \dot{Q} v jej okolí pomocou dvojčlenného Taylorovho radu). Na ploche pdx sa odvádza konvekciou z elementu teplo rýchlosťou $pdxh(T)(T - T_{\infty})$ a nech sa ešte v objeme elementu tvorí teplo rýchlosťou \dot{q} udanej na jednotku dĺžky. Tepelná bilančná rovnica potom je

$$\dot{Q}dt - (\dot{Q} + \frac{d\dot{Q}}{dx}dx)dt + \dot{q}dxdt - ph(T)Tdxdt = 0 \quad (7.40)$$

z ktorej dostávame

$$-\frac{d\dot{Q}}{dx} + \dot{q} - phT = 0 \quad (7.41)$$



Obr. 7.8

Keď uplatníme vzťah medzi rýchlosťou tepelného toku \dot{Q} a teplotným gradientom (známy z elementárnej termomechaniky)

$$\dot{Q} = -\lambda(T)S \frac{dT}{dx} \quad (7.42)$$

a zavedieme teplotnú závislosť materiálu dostaneme diferenciálnu rovnicu platnú pre priebeh *prevyšujúcej* teploty v prúte

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(T)S \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} - ph(T)T = 0 \quad (7.43)$$

Ak ju zapíšeme v základnom tvare podľa (7.30)

$$-\frac{d}{dx} \left(\lambda(T)S \frac{dT}{dx} \right) + ph(T)T - \dot{q} = 0 \quad (7.44)$$

potom vidieť, že je špeciálnym prípadom rovnice (7.30) s $a = \lambda(T)S$, $b = 0$, $c = ph(T)$, $f = \dot{q}$.

Pre konkrétnu úlohu sa dve okrajové podmienky volia podľa (7.31). Pre úplnosť poznamenávame, že člen s funkciou b , t.j. s dT/dx , by sa v rovnici objavil len vtedy, keby sa prút pohyboval v smere osi x určitou rýchlosťou.

Uvádžeme ešte rozmery a údaje o niektorých veličinách, s ktorými sme sa stretli v tejto časti:

\dot{Q} [W] - rýchlosť tepelného toku (rýchlosť vedenia tepla)

λ [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$] - koeficient vedenie tepla

h [$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$] - koeficient prestupu tepla

p [m] - perimeter (obvod plochy)

Hodnota koeficientu vedenia tepla pre oceľ je 50, hliník 200, meď 390 [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$],

Hodnota koeficientu prestupu tepla silne závisí od média a charakteristiky jeho prúdenia:

vzduch $h = 10$ až 100 [$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$], voda $h = 500$ až 10000 [$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$]

Príklad na nelineárne vedenie tepla

1. Zadanie a exaktné riešenie

Budeme riešiť nelineárny prípad jednorozmerného vedenia tepla špeciálne zvolený tak, aby mal, pre účely porovnania, aj riešenie v uzatvorenom tvare. Rozmery veličín kvôli jednoduchosti nebudeme písať, pre menej obvyklé sme ich uviedli v predchádzajúcej časti.

Nech jednorozmerné vedenie tepla v prúte o dĺžke $L = 1$ je udané diferenciálnou rovnicou (7.44) bez prúdenia

$$-\frac{d}{dx}\left(T\frac{dT}{dx}\right)+1=0 \quad 0 < x < 1 \quad (7.45)$$

Okrajové podmienky nech sú

$$\dot{Q}|_{x=0} = T\frac{dT}{dx}|_{x=0} = 0 \quad \text{a} \quad T|_{x=L} = \sqrt{2} \quad (7.46)$$

Na ľavej strane je teda prút izolovaný (implicitne aj na bočných stenách) a na pravej strane je predpísaná prevyšujúca teplota $T(L) = \sqrt{2}$. Z prúta sa po dĺžke spojitie odoberá teplo rýchlosťou $\dot{q} = -1$. Treba určiť funkciu $T \equiv T(x)$ a rýchlosť, ktorou vchádza teplo do prúta na pravej čelnej ploche, t.j. $\dot{Q}(x=1)$. Exaktné riešenie úlohy je

$$T(x) = \sqrt{1+x^2} \quad (7.47)$$

o čom sa možno presvedčiť dosadením do (7.45).

2. Zostavenie aproximačných rovníc MKP

Pri riešení úlohy pomocou MKP rozdelíme prút na určitý počet prvkov a prvou úlohou je určenie matice koeficientov (v tomto prípade matice vedenie tepla) všeobecného e-teho prvku. Zvolíme lineárny prvok s tvarovými funkciami (7.15) a dĺžkou ℓ_e . Členy matice prvku určíme zo (7.35), kde $a = T(x)$, $b = 0$, $c = 0$ a aproximačná funkcia teploty na prvku podľa (7.2) je

$$T^e(x) = N_1^e(x)T_1^e + N_2^e(x)T_2^e \quad (7.48)$$

kde T_1^e a T_2^e sú teploty v uzlových bodoch prvku. Dostaneme

$$\mathbf{K}^e = \frac{T_1^e + T_2^e}{2\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.49)$$

Zo (7.36) určíme ekvivalentnú náhradu spojitého "zaťaženia" \dot{q} uzlovými hodnotami

$$\mathbf{f}^e = \dot{q}\ell_e \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (7.50)$$

Bilančné rovnice prvku (7.33) sú nelineárne

$$\frac{T_1^e + T_2^e}{2\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1^e \\ \dot{Q}_2^e \end{Bmatrix} + \dot{q}\ell_e \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad (7.51)$$

a táto nelineárnosť sa prenesie aj do globálnych bilančných rovníc modelu telesa. Tieto rovnice dostaneme sčítaním rozšírených matíc prvkov, pričom zavedieme globálne číslovanie uzlových hodnôt. Zvolíme len dva rovnako dlhé prvky a podľa horeuvedenej schémy sčítavania dostaneme

$$\frac{1}{2\ell_e} \begin{bmatrix} T_1 + T_2 & -T_1 - T_2 & 0 \\ -T_1 - T_2 & T_1 + 2T_2 + T_3 & -T_2 - T_3 \\ 0 & -T_2 - T_3 & T_2 + T_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{Q}_1^{(1)} \\ \dot{Q}_2^{(1)} + \dot{Q}_1^{(2)} \\ \dot{Q}_2^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (7.52)$$

Máme tri rovnice s tromi neznámymi T_1 , T_2 a $Q_2^{(2)}$; komplikácia ale spočíva v tom, že rovnice sú nelineárne (neznáme sa nachádzajú aj v matici koeficientov) a úloha sa musí riešiť iteračne. Na pravej strane sú všetky hodnoty okrem $Q_2^{(2)}$ známe: $Q_1^{(1)} = 0$ (je to okrajová podmienka), $Q_2^{(1)} + Q_1^{(2)} = 0$ (sú rovnako veľké opačného zmyslu), všetky členy f_i sú rovnaké a rovné $0,5\dot{q}\ell_e = -0,25$ (pretože $\dot{q} = -1$ a $\ell_e = 0,5$). Na ľavej strane poznáme $T_3 = \sqrt{2}$ (je to okrajová podmienka a $2\ell_e = 1$). Prvé dve rovnice po dosadení týchto hodnôt môžeme zapísať takto

$$\begin{aligned} R_1 &= (T_1 + T_2)T_1 - (T_1 + T_2)T_2 + 0,25 = 0 \\ R_2 &= -(T_1 + T_2)T_1 + (T_1 + 2T_2 + \sqrt{2})T_2 - (T_2 + \sqrt{2})\sqrt{2} + 0,5 = 0 \end{aligned} \quad (7.53)$$

Z týchto rovníc určíme pomocou Newton-Raphsonovej metódy T_1 a T_2 a potom z vynechanej rovnice $Q_2^{(2)}$.

3. Princíp Newton-Raphsonovej metódy a výpočet príkladu

Newton-Raphsonovou metódou sme sa obšírne zaoberali v [2], takže tu uvádzame len princíp, potrebný na pochopenie spôsobu riešenia nelineárnej sústavy rovníc (7.53). Riešenie sústavy vychádza zo zvolených začiatočných hodnôt hľadaných prvkových hodnôt, ktoré musia zohľadniť okrajové podmienky. V našom prípade zvolíme napr.

$$\mathbf{T}_0 = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} \quad (7.54)$$

Keď tieto hodnoty dosadíme do (7.53) rovnice nebudú splnené a vznikne vektor "nerovnovážnych" zvyškov

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\mathbf{T}_0) \quad (7.55)$$

Linearizovaním tohto systému dostávame

$$\mathbf{r}_L(\mathbf{T}) = \mathbf{r}(\mathbf{T}_0) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{T}_0)}{\partial \mathbf{T}} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_0)$$

Prvú aproximáciu \mathbf{T}_1 hľadáme tak, aby $\mathbf{r}_L(\mathbf{T}_1) = \mathbf{0}$. Potom platí

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{T}}(\mathbf{T}_0)(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_0) = -\mathbf{r}(\mathbf{T}_0) \quad (7.56)$$

Po zvolení začiatočných (východných) hodnôt posunutí \mathbf{T}_0 predstavuje (7.56) lineárny systém rovníc s neznámym vektorom $\Delta \mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_0$. Ak matica tohto systému je regulárna potom jeho riešenie je

$$\Delta \mathbf{T}_0 = -[\mathbf{K}_T(\mathbf{T}_0)]^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{T}_0)$$

s tzv. tangenciálnou maticou tuhosti telesa (Jacobiho maticou)

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \partial R_1 / \partial T_1 & \partial R_1 / \partial T_2 \\ \partial R_2 / \partial T_1 & \partial R_2 / \partial T_2 \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

Hľadaná aproximácia potom je $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_0 + \Delta \mathbf{T}_0$. Opakovaním tohoto postupu dostaneme vzťah pre postupnosť aproximácií

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{T}_i - [\mathbf{K}_T(\mathbf{T}_i)]^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{T}_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, i_{\max} \quad (7.58)$$

Ak táto postupnosť konverguje, tak sa výpočet ukončuje podmienkou pre $\|\mathbf{T}_{i+1} - \mathbf{T}_i\|$ alebo $\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|$.

Tento proces možno jednoducho realizovať v programe Mathematica (obr. 7.9). Uzlové teploty príkladu sú

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 1,118 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} \quad (7.59)$$

a aproximačné funkcie teploty na prvkoch podľa (7.48) a (7.15)

$$T^{(1)}(\bar{x}) = (1 - 2\bar{x}) + 2,236\bar{x} \quad 0 < \bar{x} < 0,5 \quad (7.60)$$

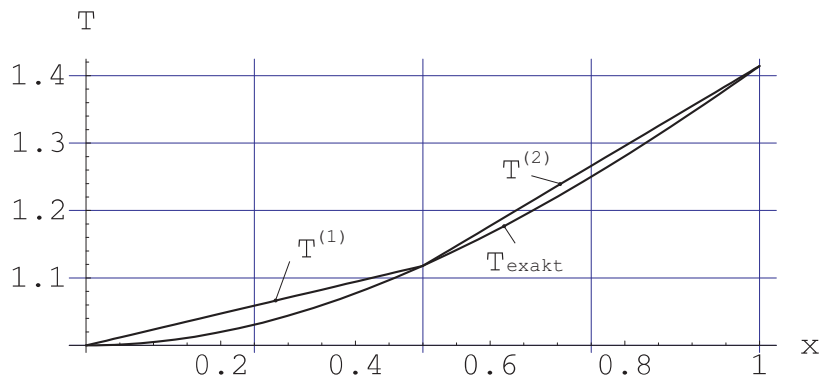
$$T^{(2)}(\bar{x}) = 1,118(1 - 2\bar{x}) + 2\sqrt{2}\bar{x} \quad 0 < \bar{x} < 0,5 \quad (7.61)$$

Porovnanie exaktného a numerického riešenia je na obr. 7.10 (*Mathematica 5*). Presnejšia aproximáciu možno dosiahnuť pomocou väčšieho počtu prvkov alebo použitím kvadratických interpolačných funkcií (7.16).

```
(*Vektor nerovnovážnych zvyškov:*)
R1[{T1_, T2_}] = (T1 + T2)*T1 - (T1 + T2)*T2 + 0.25;
R2[{T1_, T2_}] = -(T1 + T2)*T1 + (T1 + 2.*T2 +
  Sqrt[2])*T2 - (T2 + Sqrt[2])*Sqrt[2] + 0.5;
R[{T1_, T2_}] = {R1[{T1, T2}], R2[{T1, T2}]};
(*Newton-Raphsonova iteračná procedúra:*)
NewtonRaphson[T0_, tol_, max_] :=
Module[{norma = 1, i = 0},
  T0 = T0;
  Print["T0 = ", T0];
  KT[{T1_, T2_}] = Transpose[{D_T1 R[{T1, T2}], D_T2 R[{T1, T2}]}];
  Print["Ktang = " MatrixForm[KT[{T1_, T2_}]]];
  While[And[i < max, norma > tol],
    T1 = T0 - (Inverse[KT[T0]]) . R[T0];
    Print["T" i+1, " = ", T1];
    norma = Sqrt[(T1 - T0).(T1 - T0)];
    If[norma < tol, Print["T" i+1, " = ", MatrixForm[R[T1]]];
    T0 = T1;
    i = i + 1;];
Print["VÝSLEDKY"];
(*Odštartovanie iterácie so začiatočnými hodnotami:*)
NewtonRaphson[{0.5, 0.5}, 10^-2, 10];

VÝSLEDKY
T0 = {0.5, 0.5}
Ktang = ( 2 T1_ -2 T2_
          -2 T1_ 4. T2_ )
T1 = {1.25, 1.5}
T2 = {1.025, 1.16667}
T3 = {1.0003, 1.11905}
T4 = {1., 1.11803}
T4 = ( -9.33594 x 10^-7
        1.96011 x 10^-6 )
```

Obr. 7.9



Obr. 7.10

Tangenciálnu maticu vedenia tepla modelu možno určiť dvomi spôsobmi. Jednak ako Jacobiho maticu (7.57) sústavy (7.53), ktorá pre náš príklad je

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial T_1} & \frac{\partial R_1}{\partial T_2} \\ \frac{\partial R_2}{\partial T_1} & \frac{\partial R_2}{\partial T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2T_1 & -2T_2 \\ -2T_1 & 4T_2 \end{bmatrix} \quad (7.62)$$

ako ju určil aj program (obr. 7.9). Všimnime si, že je nesymetrická.

Druhá možnosť, často využívaná v programoch MKP (napr. aj v programe NELMKP v [2] pre pevnostné prvky), je taká, že sa najprv odvodí tangenciálna matica pre všeobecný e -ty prvok a podľa tohto predpisu sa v cykle cez všetky prvky vytvárajú tangenciálne matice prvkov modelu; z tých sa súčasne usporiadanou adíciou vytvára globálna tangenciálna matica.

Pre ij -ty člen tangenciálnej matice vedenie tepla prvku platí

$${}^T K_{ij}^e = \frac{\partial R_i^e}{\partial T_j^e} = \frac{\partial}{\partial T_j^e} \left(\sum_{m=1}^n K_{im}^e T_m^e - F_i^e \right) = \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial K_{im}^e}{\partial T_j^e} T_m^e + K_{im}^e \frac{\partial T_m^e}{\partial T_j^e} \right) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial K_{im}^e}{\partial T_j^e} T_m^e + K_{ij}^e \quad (7.63)$$

a tangenciálna matica lineárneho prvku v je

$$\mathbf{K}_T^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial K_{11}^e}{\partial T_1^e} T_1^e + \frac{\partial K_{12}^e}{\partial T_1^e} T_2^e & \frac{\partial K_{11}^e}{\partial T_2^e} T_1^e + \frac{\partial K_{12}^e}{\partial T_2^e} T_2^e \\ \frac{\partial K_{21}^e}{\partial T_1^e} T_1^e + \frac{\partial K_{22}^e}{\partial T_1^e} T_2^e & \frac{\partial K_{21}^e}{\partial T_2^e} T_1^e + \frac{\partial K_{22}^e}{\partial T_2^e} T_2^e \end{bmatrix} + \mathbf{K}^e = \frac{T_2^e - T_1^e}{2\ell_e} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{T_1^e + T_2^e}{2\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

Súčtom rozšírených tangenciálnych matíc oboch prvkov nášho príkladu a zavedením globálneho číslovania prvkových teplôt dostaneme opäť maticu (7.62).