

D9 Konštitutívne rovnice hyperelastického materiálu

Geometrické rovnice a diferenciálne rovnice rovnováhy platia pre ľubovoľný materiál, ktorý má vlastnosti spojitého kontinua. Boli odvodené nezávisle od seba a neobsahujú žiadne materiálové charakteristiky. Napätie, ako miera namáhania telesa, je však závislé od deformácie a že túto závislosť ovplyvňuje aj druh materiálu, nás presvedča experimentálna prax. Konštitutívne (fyzikálne, materiálové) rovnice slúžia na stanovenie tejto závislosti (konštituuju túto závislosť). Nie sú vo všeobecnosti odvodené od nejakých fyzikálnych princípov (aj keď musia spĺňať určité pravidlá - napr. musia byť objektívne, t.j. nezávislé od tuhého pohybu telesa v danom súradnicovom systéme); vyjadrujú v podstate len vlastnosti matematického modelu uvažovaného materiálu tak, aby vyhoveli experimentálnym údajom.

Existuje veľké množstvo materiálových modelov a s nimi spojených konštitutívnych rovníc, ktoré sa snažia simulovať rozličné reálne materiály pre rôzne typy stacionárneho i nestacionárneho namáhania. Mnoho materiálov vykazuje po určitú hranicu veľkosti zaťaženia lineárnu elastickú závislosť medzi deformáciou a napätím, ktorú možno vyjadriť vo forme zovšeobecnenia jednoosého Hookeovho zákona

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (9.1)$$

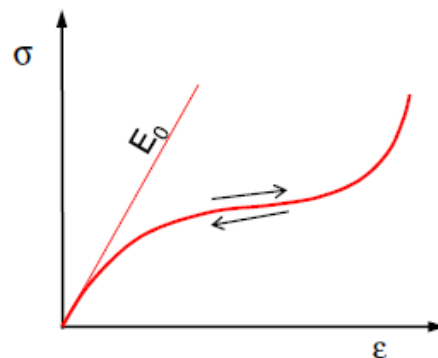
kde redukciou členov materiálového tenzora c_{ijkl} možno vyjadriť všetky základné typy pružného lineárneho materiálu. Pod pružným materiálom sa rozumie taký materiál, ktorého deformácia vymizne, keď naň prestanú pôsobiť vonkajšie sily. Napätie v zaťaženom telese s takto definovaným materiálom možno vyjadriť aj zo vzťahu

$$\sigma = \frac{\partial W(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{2} \epsilon : \mathbf{C} : \epsilon \right) \quad (9.2)$$

kde W je merná energia napätosti (deformačná energia akumulovaná v jednotke objemu), nazývaná tiež elastický potenciál alebo elastická potenciálová funkcia. Napr. pre jednoosý ťah izotropného materiálu dostávame

$$\sigma = \frac{\partial W(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{2} \epsilon E \epsilon \right) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{2} \epsilon^2 E \right) = E \epsilon$$

V technickej praxi sa často využívajú aj *nelineárne* elastické materiály, ktoré sú pružné vo veľkom rozsahu deformácie, pričom ale závislosť napätia od deformácie je nelineárna (napr. technická guma, penové materiály, elastomérové kompozity, rôzne plasty, biomateriály). Vzhľadom na ich relatívne malú tuhosť a spôsob technického využitia sú úlohy s takýmto materiálom skoro vždy ešte aj geometricky nelineárne. Pokiaľ napätosť zaťaženého telesa z takéhoto materiálu nezávisí od zaťažovacej cesty, ale len od výsledného deformačného stavu, možno napätosť určovať z funkcie mernej energie napätosti W a hovoríme o *hyperelastickom* materiáli (obr. 1). Mnohé hyperelastické materiály majú vysokú hodnotu objemového modulu a často sa potom pri teoretickom spracovaní ich modelov považujú za *nestlačiteľné* (s nekonečne veľkou hodnotou objemového modulu, t.j. zmena hydrostatického tlaku nevyvolá žiadnu zmenu objemu takéhoto materiálu), prípadne *takmer nestlačiteľné* (tým sa myslí materiálový model, pri ktorom sa s ohľadom na numerické spracovanie pripúšťa malá hodnota stlačiteľnosti).



Obr.1 Jednoosá charakteristika nelineárneho elastického materiálu

Základným krokom tvorby hyperelastického materiálového modelu je návrh skalárneho potenciálu W , ktorý je funkciou vhodnej miery deformácie [D3], najčastejšie deformačného gradientu \mathbf{F} , pravého resp. ľavého Cauchy-Greenovho tenzora deformácie \mathbf{C} resp. \mathbf{b} , prípadne hlavných natiahnutí $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ určených spektrálnou dekompozíciou \mathbf{U} , resp. \mathbf{V} .

Pre deformačný gradient a jeho Jacobián platí

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad J = \det(\mathbf{F}) \quad (9.3)$$

Pravý a ľavý Cauchy-Greenov tenzor deformácie sú

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (9.4)$$

Ak uvažujeme hyperelastický materiál, tak potom miera napätia materiálovej častice \mathbf{X} zaťaženého telesa závisí len od aktuálneho deformačného gradientu \mathbf{F} tejto častice. Pretože energeticky konjugovaným partnerom \mathbf{F} je prvé Piola-Kirchhoffovo napätie \mathbf{P} platí

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \quad (9.5)$$

Ak sa nám za pomoci experimentu podarilo pre daný materiál vyjadriť elastický potenciál W potom analogicky s (9.2) možno napísať

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \frac{\partial W_p(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X})}{\partial \mathbf{F}} \quad (9.6)$$

Potenciál W i závislosť napätových mier na tejto funkcii možno modifikovať podľa vzťahov, ktoré sme uviedli v [D3] a [D4]. Napr. z požiadavky objektívnosti konštitutívnych vzťahov vyplýva, že W je na \mathbf{F} závislé len cez jeho zložku natiahnutia \mathbf{U} a nezávislé na zložke rotácie \mathbf{R} , a pretože pre pravý Cauchy-Greenov tenzor deformácie platí $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, možno napísať

$$w_p(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = w(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \quad (9.7)$$

Pre prírastok Green Lagrangeovho tenzora deformácie $\dot{\mathbf{E}}$, ktorý je energeticky združený s druhým Piola-Kirchhoffovým tenzorom napätia \mathbf{S} , platí $\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}$, dostávame analogicky s (9.6) tiež

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}}; \quad \mathbf{S}(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \quad (9.8)$$

Ak má hyperelastický materiál *izotropné* vlastnosti, potom vzťah medzi jeho potenciálom a \mathbf{C} je nezávislý od materiálových osí a musí byť funkciou invariantov tenzora \mathbf{C}

$$w(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = w(I_C, II_C, III_C, \mathbf{X}) \quad (9.9)$$

kde

$$\begin{aligned} I_C &= \text{tr} \mathbf{C} = \mathbf{C} : \mathbf{I} \\ II_C &= \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}) = \mathbf{C} : \mathbf{C} \quad \text{klasická forma tohto invariantu je } II_C^* = \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2] \\ III_C &= \det \mathbf{C} = J^2; \quad J = \det \mathbf{F} \end{aligned} \quad (9.10)$$

a pre druhé Piola-Kirchhoffovo napätie podľa (9.8) a (9.9) možno napísať

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_C} \frac{\partial I_C}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial W}{\partial II_C} \frac{\partial II_C}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial W}{\partial III_C} \frac{\partial III_C}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_C} \mathbf{I} + 4 \frac{\partial W}{\partial II_C} \mathbf{C} + 2 J^2 \frac{\partial W}{\partial III_C} \mathbf{C}^{-1} \quad (9.11)$$

kde sa uplatnili derivácie invariantov podľa zložiek tenzora \mathbf{C} [Lit1]

$$\frac{\partial I_C}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad \frac{\partial II_C}{\partial \mathbf{C}} = 2\mathbf{C} \quad \frac{\partial III_C}{\partial \mathbf{C}} = J^2 \mathbf{C}^{-1} \quad (9.12)$$

Invarianty \mathbf{C} a \mathbf{b} sú identické

$$\begin{aligned} I_b &= \text{tr}(\mathbf{b}) = \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \text{tr} \mathbf{C} = I_C \\ II_b &= \text{tr}(\mathbf{b}\mathbf{b}) = \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{F}^T) = \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}) = II_C \\ III_b &= \det(\mathbf{b}) = \det(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \det \mathbf{C} = III_C \end{aligned}$$

z čoho tiež vyplýva, že derivácie W podľa invariantov \mathbf{C} v (9.11) sú tiež deriváciami W podľa invariantov \mathbf{b} .

Cauchyho napätie možno určiť z druhého Piola-Kirchhoffovho napätia pomocou transformačného vzťahu [D4]

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (9.13)$$

Keď do tohto vzťahu dosadíme (9.11) dostaneme

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \frac{\partial W}{\partial I_c} \mathbf{b} + 4J^{-1} \frac{\partial W}{\partial II_c} \mathbf{b}^2 + 2J \frac{\partial W}{\partial III_c} \mathbf{I} \quad (9.14)$$

Uvedené rovnice platia pre všeobecný izotropný hyperelastický materiálový model. Ich využitie si ukážeme na relatívne jednoduchom modeli tzv. *stlačiteľného Neo-Hookeovského materiálu*. Názov dostal podľa toho, že zápis jeho charakteristík (Eulerovského tenzoru deformácie) je analogický so zápisom charakteristík klasického lineárneho izotropného Hookeovského materiálu. Stlačiteľný Neo-Hookeovský model je definovaný potenciálovou funkciou (existuje však aj viacero alternatívnych zápisov, najmä pri použití III_c^* v (9.10))

$$W = \frac{M}{2}(I_c - 3) - G \ln J + \frac{\Lambda}{2}(\ln J)^2 \quad (9.15)$$

kde M a Λ sú materiálové konštanty. Všimnime si, že funkcia okrem základného predpokladu objektívnosti (je funkciou invariantov I_c a $\sqrt{III_c} = J$) spĺňa aj ďalší nevyhnutný predpoklad, že pri nulovej deformácii je elastická potenciálna energia W nulová ($\mathbf{C} = \mathbf{I}$, $I_c = 3$, $\det \mathbf{F} = 1$, $\ln J = 0$).

Druhý Piola-Kirchhoffov tenzor deformácie teraz už môžeme vyjadriť z rovnice (9.11)

$$\mathbf{S} = M(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \Lambda(\ln J)\mathbf{C}^{-1} \quad (9.16)$$

a Cauchyho napätie z (9.14) pomocou zložiek ľavého Cauchy-Greenovho tenzora \mathbf{b}

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{M}{J}(\mathbf{b} - \mathbf{I}) + \frac{\Lambda}{J}(\ln J)\mathbf{I} \quad (9.17)$$

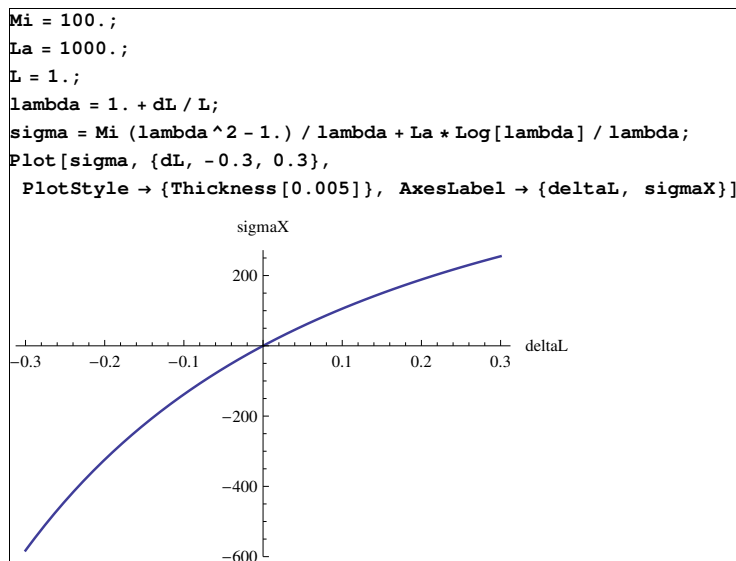
Ak budeme uvažovať jednoosý ťah bez priečnej deformácie, potom

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad J = \det \mathbf{F} = \lambda; \quad \lambda = \frac{l}{L} = 1 + \frac{\Delta L}{L}$$

a z (9.17) dostávame

$$\sigma_x = \frac{M}{\lambda}(\lambda^2 - 1) + \frac{\Lambda}{\lambda} \ln \lambda$$

Pre prút s jednotkovou dĺžkou, s $M = 100$ Pa a $\Lambda = 1000$ Pa, sme priebeh σ_x graficky znázornili na obr. 1 pre najčastejšie využívaný rozsah deformácie tohto materiálového modelu. Spôsob identifikácie reálneho materiálu s týmto modelom (i ďalšími hyperelastickými materiálovými modelmi) možno nájsť v manuáloch komerčných programov MKP.



Obr. 1

Iný jednoduchý prípad je zaťaženie všestranným (hydrostatickým) tlakom, kedy

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}; \quad J = \det \mathbf{F} = \lambda^3; \quad \lambda = \frac{1}{L} = 1 + \frac{\Delta L}{L}$$

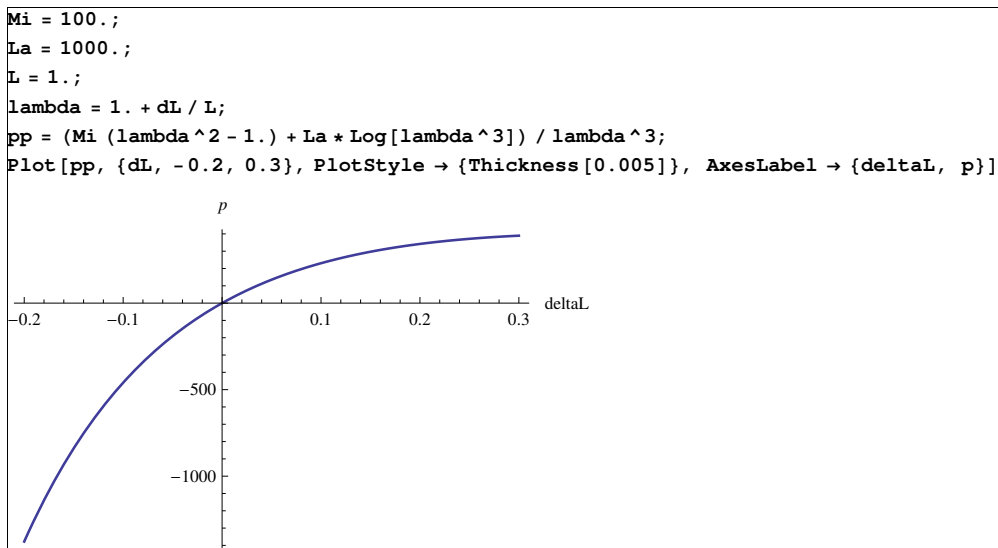
Vtedy podľa (9.17) dostávame

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\lambda^3} \left[M(\lambda^2 - 1) + \Lambda \ln \lambda^3 \right] \mathbf{I}$$

čo predstavuje zaťaženie

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p = \frac{1}{\lambda^3} \left[M(\lambda^2 - 1) + \Lambda \ln \lambda^3 \right]$$

Závislosť tlaku/ťahu p na natiahnutí λ je znázornená na obr. 2 (všestranný ťah je len ilustračná záležitosť)



Obr. 2

Pri práci s *nestlačiteľnými* alebo *takmer nestlačiteľnými* materiálovými modelmi je potrebné oddeliť *objemovú* časť deformácie (ktorá mení len objem materiálovej častice) od *distorznej (tvarovej, deviátorovej)*, ktorá mení len tvar častice, bez zmeny objemu). Pretože determinant deformačného gradientu udáva objemovú zmenu dv / dV , pre distorznu časť deformačného gradientu $\hat{\mathbf{F}}$ potom musí platiť

$$\det \hat{\mathbf{F}} = 1 \quad (9.18)$$

Ak zvolíme

$$\hat{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = J^{1/3} \hat{\mathbf{F}} \quad (9.19)$$

potom je táto podmienka splnená

$$\begin{aligned} \det \hat{\mathbf{F}} &= \det (J^{-1/3} \mathbf{F}) \\ &= (J^{-1/3})^3 \det \mathbf{F} \\ &= J^{-1} J = 1 \end{aligned}$$

Platnosť vzťahu medzi \mathbf{F} a $\hat{\mathbf{F}}$ ilustruje číselný príklad na obr. 3. Analogicky možno rozložiť aj ďalšie tenzorové miery deformácie. Napr. pre distorznu zložku pravého Cauchy-Greenovho tenzora deformácie a jeho prvý invariant platí

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}} = (\det \mathbf{C})^{-1/3} \mathbf{C} = J^{-2/3} \mathbf{C} \quad \hat{I}_c = \hat{I}_b = \text{tr} \hat{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \text{tr} \mathbf{C} \quad (9.20)$$

```

F = {{1.5, -1.2, 0},
      {2.6, 2.0, 0},
      {0, 0, 1}};
Print["F = ", F // MatrixForm]
J = Det[F];
Print["J = detF = ", J]
pom = Det[J^(-1/3) * F];
Print["detF' = det[J^(-1/3)*F] = ", pom]

F =  $\begin{pmatrix} 1.5 & -1.2 & 0 \\ 2.6 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 
J = detF = 6.12
detF' = det[J^(-1/3)*F] = 1.

```

Obr. 3

Pri nestlačiteľnom Neo-Hookeovskom modeli sa elastický potenciál (9.15) zjednoduší na

$$\widehat{W} = \frac{M}{2}(\text{tr}\widehat{\mathbf{C}} - 3) \quad (9.21)$$

pravda, z úplnej nestlačiteľnosti materiálu vyplývajú aj niektoré výpočtové nepríjemnosti. Pri úplne nestlačiteľnom materiáli hydrostatický tlak ($p = \sigma_{kk} / 3$) ľubovoľnej hodnoty nespôsobí zmenu tvaru telesa, takže napätie nie je možné jednoznačne určiť z jeho deformácie. Z konštitutívnych rovníc možno určiť len deviatorické napätie $\sigma' = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3$. Tlak p , ktorý sa objaví v konštitutívnych rovniciach, je nutné určovať ako ďalšiu primárnu neznámu úlohy z podmienok rovnováhy a okrajových podmienok. Pre nestlačiteľný Neo-Hookeovský materiál rovnica (9.17) sa zmení na

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + p\mathbf{I} = MJ^{-5/3}(\mathbf{b} - \frac{1}{3}I_b\mathbf{I}) + p\mathbf{I} \quad (9.22)$$

kde opäť paltí $I_b = I_c = \text{tr}\mathbf{C}$.

V MKP sa problém s neznámou p často rieši pomocou tzv. *takmer nestlačiteľných* materiálových modelov. Postupuje sa tak, že k distorznej zložke potenciálu sa na umožnenie malej objemovej deformácie pridáva objemová energetická zložka $U(J)$ na vytvorenie totálneho potenciálu v tvare

$$W(\mathbf{C}) = \widehat{W}(\mathbf{C}) + U(J) = \frac{M}{2}(\text{tr}\widehat{\mathbf{C}} - 3) + \frac{1}{2}K(J - 1)^2 \quad (9.23)$$

kde sme zaviedli jednoduchý príklad takejto zložky

$$U(J) = \frac{1}{2}K(J - 1)^2 \quad p = \frac{dU}{dJ} = K(J - 1) \quad (9.24)$$

Pri nestlačiteľných materiáloch sa K volí ako veľký násobok M (10^3 až $10^4 M$). S touto materiálovou konštantou sa možno stretnúť aj pri stlačiteľných hyperelastických materiálových modeloch, keď sa uvažuje energetický potenciál v tvare (9.23). Vtedy K predstavuje objemový modul materiálu (pozri napr. Neo-Hookeovský model v teoretickom manuáli ANSYSu). Pri takejto voľbe U , potom Cauchyho napätie pre Neo-Hookeovský materiálový model podľa (9.22) je

$$\boldsymbol{\sigma} = MJ^{-5/3}(\mathbf{b} - \frac{1}{3}I_b\mathbf{I}) + K(J - 1)\mathbf{I} \quad (9.25)$$

Konštitutívne rovnice izotropného hyperelastického materiálu sa často vyjadrujú aj pomocou hlavných natiahnutí $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a hlavných smerov $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i = \mathbf{I} \quad (9.26)$$

Je to výhodné najmä vzhľadom na experimentálne určovanie materiálových konštant modelu. Spektrálna reprezentácia pravého Cauchy - Greenovho tenzora deformácie a jeho inverzie pomocou týchto veličín je [D3]

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (9.27)$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{-2} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (9.28)$$

Pretože $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sú vlastné čísla tenzora \mathbf{C} , jeho invarianty možno vyjadriť tiež v tvare

$$\begin{aligned} I_1 &= I_C = I_b = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= II_C^* = II_b^* = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ I_3 &= III_C = III_b = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (9.29)$$

a využívať ich pri vyjadrovaní funkcií elastického potenciálu W rovnako ako (9.10). Z podmienky (9.19) pre distorzné hlavné natiahnutia vyplýva

$$\hat{\lambda}_i = J^{-1/3} \lambda_i \quad (9.30)$$

a pre nestlačiteľný materiál tiež platí

$$I_3 = \det \mathbf{C} = \det \mathbf{b} = 1 \quad (9.31)$$

takže distorzná (nestlačiteľná) časť elastického potenciálu obsahuje len dva distorzné invarianty

$$\hat{I}_1 = J^{-2/3} I_1 \quad \hat{I}_2 = J^{-4/3} I_2 \quad (9.32)$$

Elastický potenciál často využívaného Mooney-Rivlinovho materiálového modelu v takmer nestlačiteľnej formulácii možno potom zapísať v tvare

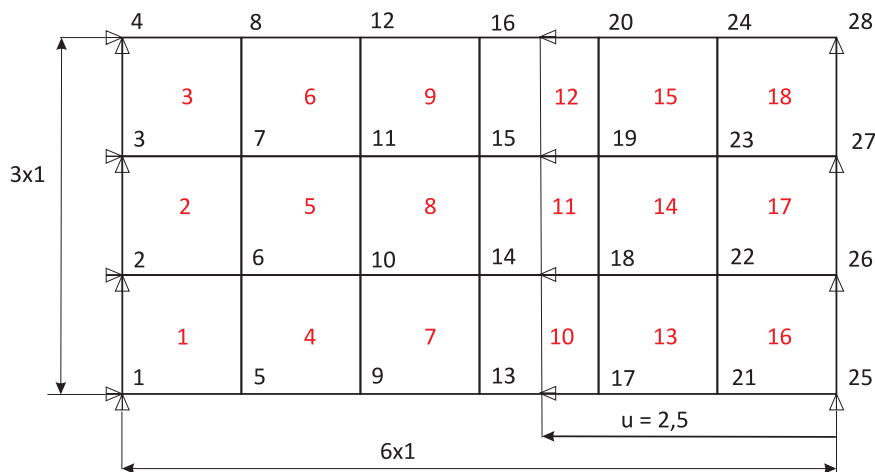
$$W = \sum_{p,q \geq 0} C_{pq} (\hat{I}_1 - 3)^p (\hat{I}_2 - 3)^q + \sum_{m=1}^M D_m (J - 1)^{2m} \quad (9.33)$$

kde C_{pq} a D_m sú materiálové konštanty. Konštanty C_{pq} vyjadrujú distorzné (šmykové) vlastnosti modelu a D_m udávajú stlačiteľnosť t.j. objemovú zmenu tohto materiálového modelu. Ak konštanty D_m sa rovnajú nule, ide o úplne nestlačiteľný materiál.

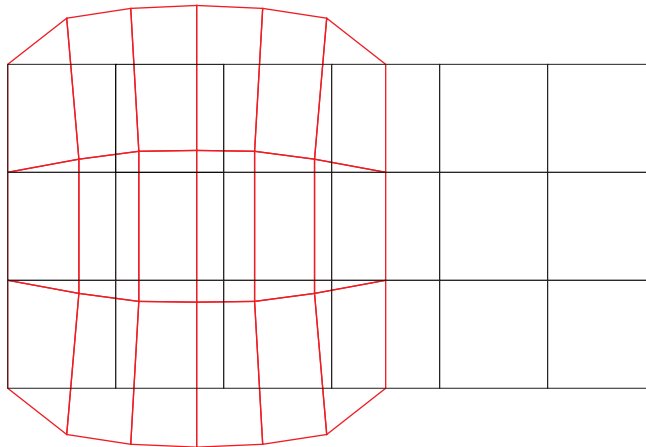
V odbornej literatúre týkajúcej sa hyperelastickosti a v manuáloch komerčných programov MKP možno nájsť množstvo hyperelastických materiálových modelov vychádzajúcich z rôzne definovaných elastických potenciálov tvorených z invariantov mier deformácie analogickým postupom, ako sme tu naznačili. Pre záujemcov o programové spracovanie úloh s hyperelastickou deformáciou možno odporučiť voľne stiahnuteľný fortranovský program FFlagSHyP (Finite element Large Strain Hyperelasto-plastic Program) opísaný v práci [Lit1].

Príklad

Pomocou programu FFlagSHyP sme riešili ilustračný príklad rovinnej napätosti telesa obdĺžnikového tvaru s rozmermi 6 x 3 a hrúbkou 0,1, ktorého sieť štvoruzlových prvkov je znázornená na obr. 4. Teleso je na ľavej hrane pevne votknuté a pravá hrana sa posunie o hodnotu 2,5 podľa obrázku, pričom sa zabraňuje jej priečnej deformácii a strate stability telesa. Materiál telesa je nestlačiteľný Neo-Hookeov (9.21) s konštantou $M=100$. Vstupné údaje sú uvedené v prílohe. Do programu sme vložili podprogram, ktorý z číselných výsledkov vytvoril postscriptovský súbor na zobrazenie zdeformovanej siete prvkov s výsledkom na obr. 5.



Obr.4



Obr. 5

Ten istý príklad sme riešili aj pomocou programu ANSYS s touto postupnosťou príkazov v interaktívnom móde:

1. Zadanie názvu úlohy

Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = GUMA, OK;

2. Typ prvkov a ich hrúbka

Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete, Add..., Hyperelastic 4 node 182, OK, Options..., K3 = Plane strs w/thk, OK, Close;

Main Menu>Preprocessor>Real Constants>Add, Edit, Delete, Add..., OK, THK = 0.1, OK

3. Materiálové údaje

Preprocessor>Material Props>Material Model Number 1, Structural, Nonlinear, Elastic, Hyperelastic, Neo-Hookean, mu = 100, d = 0, OK, Material, Exit;

4. Vytvorenie bodov strednicovej plochy modelu (číslovanie je automatické)

Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Rectangle>By 2 Corners↑: Width = 6, Height = 3, OK;

5. Vytvorenie prvkov

Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>ManualSize>Global>Size: Size = 1, OK;

Preprocessor>Meshing>Mesh>Areas>Mapped>3 or 4 sided: Pick All;

6. Upevnenie modelu a predpísanie posunutia pravej hrany modelu

Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Lines: ↑ľavú hranu, OK, Vyznačiť All DOF, Apply, ↑pravú hranu, Apply, Vyznačiť UY, Apply, ↑pravú hranu, OK, Vyznačiť UX, VALUE = -2.5, OK;

7. Zapnutie veľkých deformácií

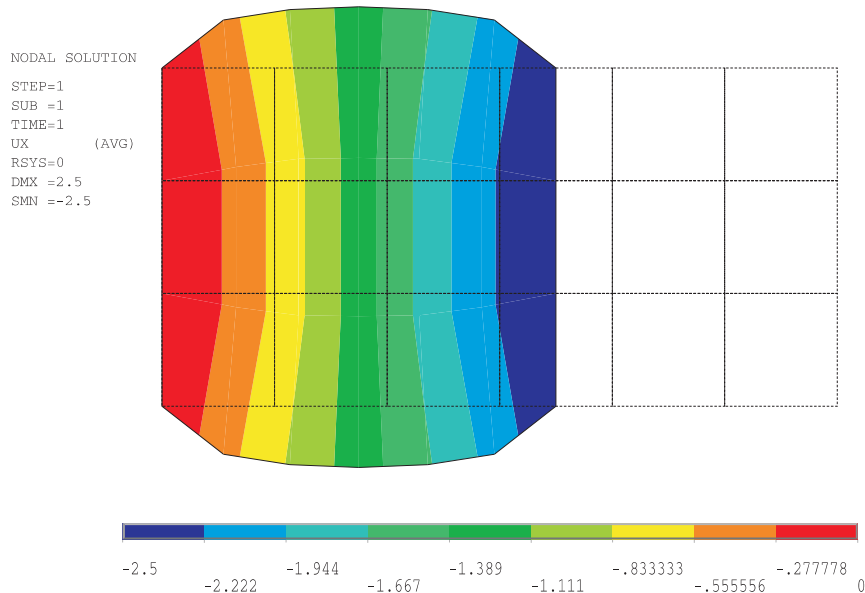
Solution>Analysis Type>Sol'n Controls: Analysis Options = Large Displacement Static, Time at end of loadstep = 1, OK;

8. Príkaz na vykonanie výpočtu

Solution>Solve>Current LS, Solve Current Load Step, OK;

9. Vykreslenie zdeformovanej siete

Main Menu>General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu: DOF Solution, X-Component of displacement, Deformed shape with undeformed model, OK;



10. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy

Ansys Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;

Literatúra

[Lit1] Bonet, J. - Wood, R.D: Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge 2008

Príloha - Vstupné údaje príkladu do programu FLagSHyP:

Příklad Guma	18
quad4	1 1 1 5 6 2
28	2 1 2 6 7 3
1 3 0. 0.	3 1 3 7 8 4
2 3 0. 1.	4 1 5 9 10 6
3 3 0. 2.	5 1 6 10 11 7
4 3 0. 3.	6 1 7 11 12 8
5 0 1. 0.	7 1 9 13 14 10
6 0 1. 1.	8 1 10 14 15 11
7 0 1. 2.	9 1 11 15 16 12
8 0 1. 3.	10 1 13 17 18 14
9 0 2. 0.	11 1 18 19 15 14
10 0 2. 1.	12 1 15 19 20 16
11 0 2. 2.	13 1 17 21 22 18
12 0 2. 3.	14 1 18 22 23 19
13 0 3. 0.	15 1 19 23 24 20
14 0 3. 1.	16 1 21 25 26 22
15 0 3. 2.	17 1 22 26 27 23
16 0 3. 3.	18 1 23 27 28 24
17 0 4. 0.	1
18 0 4. 1.	1 6
19 0 4. 2.	1. 100. 0.1
20 0 4. 3.	0 4 0 0 0
21 0 5. 0.	25 1 -2.5
22 0 5. 1.	26 1 -2.5
23 0 5. 2.	27 1 -2.5
24 0 5. 3.	28 1 -2.5
25 3 6. 0.	10 1. 0.1 30 1.e-6 0. 0. 5
26 3 6. 1.	
27 3 6. 2.	
28 3 6. 3. (pokrač. hore)	