

# Kontakt telies

## Úvod

Kontakt dvoch alebo viacerých telies patrí do kategórie pomerne zložitých nelineárnych úloh mechaniky kontinua. Rozpätie týchto úloh je od kontaktu bez trenia s malými deformáciami až po kontakt s trením s veľkými deformáciami a materiálovými nelinearitami. Formulácia kontaktných podmienok je síce rovnaká pri všetkých týchto prípadoch, ale do príslušnej úlohy vnáša ďalšie nelinearity v oblasti styku telies, nehovoriac o algoritmických problémoch spojených s detekciou a nepreniknuteľnosťou stykových plôch, ako aj s nespojitosťami pri zohľadňovaní trecích síl.

Význam riešenia týchto úloh z priemyselného hľadiska je značný; vyplýva z množstva oblastí, kde sa vyžaduje analýza kontaktných problémov:

- tvárnenie kovov a plastických látok
- prevody a ďalšie časti strojov a mechanizmov
- spoje v stavebných konštrukciách
- skrutky, matice
- základy
- nápravy, spoje v rotoroch atď.
- bariérové testy vozidiel
- odlievanie, nitovanie
- analýza vlastností pneumatík, tesnení, ložísk
- elektrické spínače

Pri analýze tejto škály problémov sa možno stretnúť s problémami charakterizovanými jedným typom fyzikálneho poľa ako aj so zviazanými problémami rôznych fyzikálnych polí. Pokiaľ sa obmedzíme len na kontaktné úlohy s mechanickým poľom premenných, potom môžeme úlohy charakterizovať ako:

- jedno, dvoj a trojrozmerné
- lineárne (napr. kontakt dvoch elastických nosníkov s malými deformáciami a posunutiami) a nelineárne (napr. kontakt pneumatiky s podložím)
- statické alebo nestacionárne (dynamické) pri nízkej alebo vysokej rýchlosti zaťaženia
- bez trenia alebo s trením

Najdôležitejšie zviazané úlohy spojené s kontaktom sú

- Termo-mechanický kontakt - je spojený s vývinom tepla od plastickej deformácie i trenia. Príkladom je rotácia a brzdenie zaťažených kolies, mechanické rezanie kovov, objemové tvárnenie
- Elektro-magneto-mechanický kontakt, napr. analýza spínačov a mikro-elektro mechanických systémov
- interakcia tekutiny a telesa

V ďalšom texte si niektoré základné pojmy z oblasti kontaktu telies ozrejníme pomocou jednoduchých statických príkladov.

## Základné pojmy

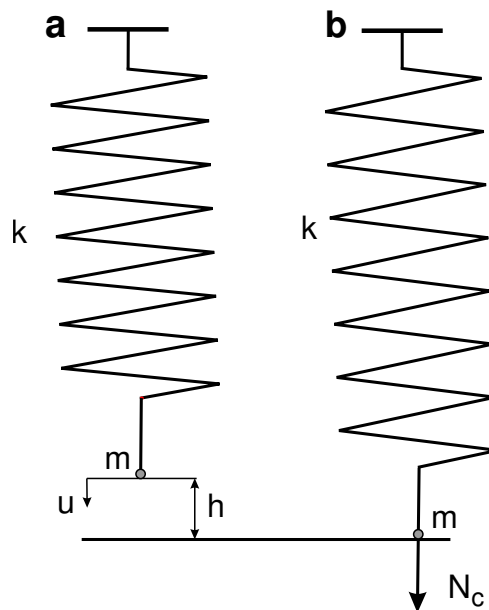
Ak valcovú pružinu na obr. 1a zaťažíme tiažovou silou bodovej hmotnosti  $m$ , bremeno sa posunie o hodnotu  $u$ , pre ktorej výpočet platí rovnovážna rovnica

$$ku - mg = 0 \quad (25.1)$$

Ak je pod bremenom tuhá podložka vo vzdialenosti  $h$ , môže dôjsť ku kontaktu s podložkou. Situácia sa kontroluje pomocou tzv. *medzerovej (penetračnej) funkcie*  $g_n(u)$ , pre ktorú sa predpisuje obmedzenie

$$g_n(u) = h - u \geq 0 \quad (25.2)$$

ktoré pri kontakte ( $u = h$ ) zabraňuje *penetrácii* telies (t.j.  $u > h$ ).



Obr. 1

Pri hmotnosti  $m$ , ktorá by pružinu natiahla o väčšiu hodnotu ako  $h$ , dôjde ku kontaktu s podložkou a vzniku normálovej *kontaktnej tlakovej sily*  $N_c < 0$  (obr. 1b). Pri konkrétnych hodnotách  $m$ ,  $k$ , a  $h$ , môžu teda nastať dva rozdielne prípady

1. Tuhosť pružiny je dostatočne veľká, aby zabránila kontaktu bremena s podložkou. Vtedy platia podmienky

$$g_n(u) > 0 \quad \text{a} \quad N_c = 0 \quad (25.3)$$

2. Tuhosť pružiny je malá, dôjde ku kontaktu s tuhou podložkou a platí

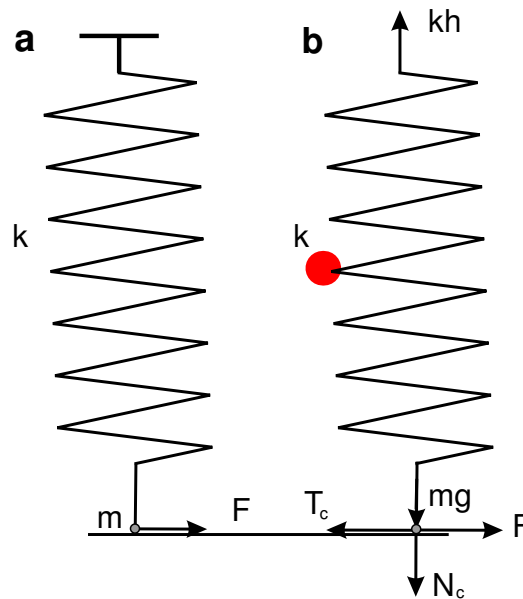
$$g_n(u) = 0 \quad \text{a} \quad N_c < 0 \quad (25.4)$$

Výpočet kontaktnej sily je pri tejto jednoduchšej úlohe možný priamo z podmienky rovnováhy (25.1)

$$N_c = -mg + kh \quad (25.5)$$

pričom z podmienky  $g_n(u) = 0$  vyplýva  $u = h$ .

Uvažujme teraz, že došlo ku kontaktu a na bremeno pôsobí aj sila  $F$  v smere rovnobežnom s podložkou (obr. 2a). Rovnovážne rovnice síl podľa obr. 2b sú



Obr. 2

$$N_c + mg - kh = 0 \quad (25.6)$$

$$F - T_c = 0 \quad (25.7)$$

Trenie medzi hmotnosťou a tuhou podperou treba opísať pomocou trecej konštitutívnej rovnice tak, aby dostatočne presne vystihovala reálnu fyzikálnu situáciu v mieste kontaktu oboch telies. Najjednoduchší a často využívaný model poskytuje Coulombov trecí zákon. Udáva vzťah medzi normálovou kontaktnou silou a kontaktnou trecou silou

$$f(N_c, T_c) = |T_c| + \mu N_c \leq 0 \quad (25.8)$$

kde  $\mu$  je koeficient statického šmykového trenia. Nerovnosť (25.8) poskytuje rozlíšenie medzi statickým a dynamickým trením v mieste kontaktu. Pre situácie, kedy dochádza k statickému treniu platí (pripomínme, že tlaková sila  $N_c$  má zápornú hodnotu)

$$|T_c| < -\mu N_c \quad \rightarrow \quad F < -\mu N_c \quad (25.9)$$

a pre začiatok dynamického trenia platí

$$|T_c| = -\mu N_c \quad \rightarrow \quad F = -\mu N_c \quad (25.10)$$

Pri statickom trení nedôjde k tangenciálnemu posunu hmotnosti po podložke (*stick state*), pri dynamickom sa hmotný bod posunie v tangenciálnom smere (*slip state*).

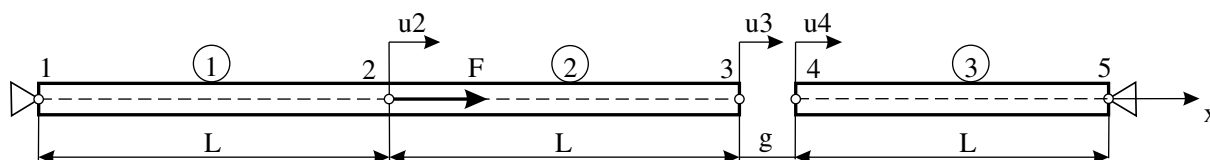
## Metódy riešenia

Princíp a fyzikálny základ metód využívaných v MKP na riešenie kontaktných úloh možno vysvetliť na jednoduchom príklade bodového kontaktu. Príklad vyriešime pomocou najčastejšie využívaných metód:

- metóda Lagrangeových multiplikátorov (*Lagrange multiplier method*)
- pokutová metóda (*penalty method*)

- rozšírená Lagrangeova metóda (*augmented Lagrange method*)

Uvažujme výpočtový model MKP jednorozmernej prútovej úlohy s tromi prvkami a piatimi uzlovými bodmi vyznačený na obr. 25.3. Sila  $F$  zaťažuje prút z lineárneho elastického materiálu s prierezom  $S$  a modulom pružnosti  $E$  smerom k ďalšiemu nezaťaženému prútu tých istých vlastností. Medzi koncovými bodmi prútov je medzera  $g$ . Zadané sú tieto hodnoty:  $F = 1500$  N,  $ES = 10000$  N,  $L = 400$  mm,  $g = 30$  mm. Pomocou MKP treba určiť kontaktnú silu  $N_c$  a posunutia voľných uzlov



Obr. 25.3

Celková potenciálna energia výpočtového modelu je [1]

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (25.11)$$

kde  $\mathbf{u}$  je vektor posunutí uzlových bodov modelu,  $\mathbf{K}$  je globálna matica tuhosti a  $\mathbf{f}$  je globálny vektor vonkajších uzlových síl. Aplikáciou princípu minima potenciálnej energie  $\partial \Pi / \partial \mathbf{u} = \mathbf{0}$  na (25.11) dostaneme výslednú sústavu rovníc

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (25.12)$$

Pretože posunutia uzlov 1 a 5 sú nulové, výsledná sústava rovníc po usporiadanom sčítaní rozšírených matíc tuhosti prvkov [1] má tvar

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \rightarrow \begin{bmatrix} 2ES/L & -ES/L & 0 \\ -ES/L & ES/L & 0 \\ 0 & 0 & ES/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.13)$$

Riešenie rovníc dáva:  $u_4 = 0$ ,  $u_2 = u_3 = FL/(ES) = 1500 \cdot 400 / 10000 = 60$  mm. Podľa týchto výsledkov výpočtový model z hľadiska kontaktnej terminológie vykazuje totálnu penetráciu uzla 3 do elementu č. 3 bez prenosu kontaktnej sily. Pretože posunutie  $u_3$  je väčšie ako  $g$ , v skutočnosti dôjde ku kontaktu oboch telies, ktorý treba zohľadniť pomocou vhodnej metódy.

## Metóda Lagrangeových multiplikátorov

V klasickej podobe sa táto metóda využíva na hľadanie minima funkcie viacerých premenných, pri súčasnom splnení určitých obmedzení. Pri kontaktných úlohách v MKP sa využíva na hľadanie extrémov funkcionálov pri zohľadnení obmedzení (väzieb) vyvolaných vzájomným kontaktom telies. Využijeme ju teraz pri riešení uvedeného príkladu.

Posunutia uzlov 3 a 4 pri kontakte obmedzuje deformačná podmienka (pozri obr. 25.3)

$$u_3 - u_4 = g \quad (25.14)$$

Z tejto podmienky dostaneme medzerovú funkciu, ktorá sa pri kontakte a fyzikálne správnych hodnotách  $u_3$  a  $u_4$  rovná nule (25.4)

$$g_n = g - u_3 + u_4 = 0 \quad (25.15)$$

Splnenie (vynútenie) tejto podmienky (väzby) možno dosiahnuť tak, že ju vynásobíme Lagrangeovým multiplikátorom

$$\lambda g_n = \lambda(g - u_3 + u_4) \quad (25.16)$$

a tento súčin pridáme do potenciálnej energie (25.11)

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} + \lambda(g - u_3 + u_4) \quad (25.17)$$

Z tohto postupu vyplýva, že v rovniciach MKP sa nám okrem neznámych  $\mathbf{u}$  objaví aj nová neznáma  $\lambda$  s rozmerom sily; je to kontaktná sila  $N_c$  v stýkajúcich sa uzloch 3 a 4.

Aplikáciou variačného postupu z podmienky  $\delta \Pi^* = 0$ , dostávame

$$\delta \mathbf{u} \mathbf{K} \mathbf{u} - \delta \mathbf{u} \mathbf{f} + \delta \lambda (g - u_3 + u_4) + \lambda (-\delta u_3 + \delta u_4) = 0 \quad (25.18)$$

a z toho sústavu rovníc zapísanú v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} 2ES/L & -ES/L & 0 & 0 \\ -ES/L & ES/L & 0 & -1 \\ 0 & 0 & ES/L & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (25.19)$$

Po dosadení číselných hodnôt a využití programu *Mathematica* dostávame

```
A={ {50, -25, 0, 0},
      {-25, 25, 0, -1},
      {0, 0, 25, 1},
      {0, -1, 1, 0} };
b={1500, 0, 0, -30};
particular=LinearSolve[A, b]
{50, 40, 10, -250}
```

s výsledkom

$$\begin{aligned} u_2 &= 50 \text{ mm} \\ u_3 &= 40 \text{ mm} \\ u_4 &= 10 \text{ mm} \\ \lambda &= N_c = -250 \text{ N} \end{aligned}$$

Pravda, vo všeobecnosti možno na výpočtový model telesa s  $n$  stupňami voľnosti predpísať  $m$  lineárne nezávislých diskretných deformačných obmedzení (väzieb) pre  $\mathbf{u}$  v tvare

$$\mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (25.20)$$

kde  $\mathbf{B}$  je matica typu  $m \times n$  a  $\mathbf{v}$  je zadaný vektor. Potom splnenie deformačných obmedzení môžeme dosiahnuť tak, že rovnicu (25.20) skalárne vynásobíme vektorom  $\boldsymbol{\lambda}$ , ktorý obsahuje  $m$  konštant (Lagrangeových multiplikátorov), a tento súčin pripočítame k funkcionálu (25.11)

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (25.21)$$

Minimalizácie  $\Pi^*$  podľa  $\mathbf{u}$  dáva

$$\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f} \quad (25.22)$$

a pretože musia platiť aj podmienky (25.20), dostávame sústavu rovníc v blokovom maticovom zápise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (25.23)$$

kde vektor  $\mathbf{u}$  udáva posunutia uzlových bodov so zohľadnenými obmedzeniami a vektor  $\boldsymbol{\lambda}$  obsahuje Lagrangove multiplikátory. Tie v prípade pevnostnej úlohy predstavujú (uzlové) sily, vyvolané zadanými deformačnými (kontaktnými) obmedzeniami alebo inak povedané, sú to sily, ktoré zabezpečujú, aby boli dodržané predpísané väzby (25.20).

Rovnice príkladu (25.19) sú špeciálnym (jednoduchým) prípadom rovníc (25.23). Pretože máme len jednu obmedzujúcu rovnicu (jednu deformačnú podmienku), vektory  $\boldsymbol{\lambda}$ , a  $\mathbf{v}$  i matica  $\mathbf{0}$  sú jednočlenné a matica  $\mathbf{B}$  je riadková.

## Pokutová metóda

Skôr ako ukážeme základné vzťahy využívané pri pokutovej metóde, je užitočné vytvoriť si predstavu o fyzikálnom princípe tejto metódy. Môže na to poslúžiť príklad 25.1 z predchádzajúcej časti, pre ktorý nech platia rovnice bez kontaktu (25.13). Pri týchto rovniciach, ako sme už uviedli, dochádza k totálnej penetrácii uzla 3 do prvku 3. Uvažujme teraz, že sme medzi uzly 3 a 4 vložili fiktívnu lineárnu "pružinu" s tuhosťou  $\alpha$  (medzerový konečný prvok s normálovou tuhosťou  $\alpha$ ), ktorá zabráňuje tejto penetrácii tým viac, čím je jej tuhosť väčšia.

Uvedený dôsledok sa pri riešení uvedeného príkladu dosiahne tak, že k energetickému potenciálu (25.11) sa pripojí energia, ktorú takáto pružina vykazuje na na penetračnom posunutí (na nesplnení podmienky  $g_N = g - u_3 + u_4 = 0$ ), kde tuhosť  $\alpha$  vystupuje ako pokutový parameter

$$\Pi^{**} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} + \frac{1}{2} \alpha (g - u_3 + u_4)^2 \quad (25.24)$$

Aplikáciou variačného postupu na minimalizáciu (25.24), t.j. z podmienky  $\delta \Pi^{**} = 0$ , dostávame

$$\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f} + \alpha (g - u_3 + u_4) (-\delta u_3 + \delta u_4) = 0 \quad (25.25)$$

Posledný člen v (25.25) posunutí dodá do sústavy rovníc bez kontaktu (25.13) dve ďalšie rovnice (vystriedaním jednotkových a nulových hodnôt variácií  $u_3$  a  $u_4$ )

$$\begin{aligned} \alpha u_3 - \alpha u_4 &= \alpha g \\ -\alpha u_3 + \alpha u_4 &= -\alpha g \end{aligned}$$

takže výsledná sústava rovníc príkladu v maticovom tvare podľa pokutovej metódy je

$$\begin{bmatrix} 2ES/L & -ES/L & 0 \\ -ES/L & ES/L+\alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & ES/L+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \alpha g \\ -\alpha g \end{bmatrix} \quad (25.26)$$

Ako vidieť, pri tejto metóde do sústavy rovníc pre určenie uzlových posunutí nepribudla žiadna nová neznáma, čo je základná výhoda oproti metóde Lagrangeových multiplikátorov. Určitá výhoda je aj to, že sa pri nej nezväčšuje šírka nenulového pásu globálnej matice tuhosti **K**.

Zvoľme tuhosť pružiny (mala by byť výrazne väčšia ako tuhosť prútov),  $\alpha = 100000 \text{ N/mm}$  a keď použijeme údaje o príklade a dosadíme čísla do (25.26) dostávame rovnice

$$\begin{bmatrix} 50 & -25 & 0 \\ -25 & 25+10^5 & -10^5 \\ 0 & -10^5 & 25+10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 10^5 \cdot 30 \\ -10^5 \cdot 30 \end{bmatrix}$$

Výpočet posunutí uzlových bodov z týchto rovníc (pomocou programu *Mathematica*) dáva dostatočne presné výsledky pri porovnaní z horeuvedenými exaktnými výsledkami dosiahnutými pomocou metódy Lagrangeových multiplikátorov:

```
A={ {50, -25, 0},
      {-25, 100025, -100000},
      {0, -100000, 100025} };
b={1500, 100000*30, -100000*30};
particular=LinearSolve[A,b]//N
{50.0008, 40.0017, 9.9991}
```

Vypočítané posunutia už zodpovedajú kontaktu oboch telies (penetrácia sa znížila na prijateľnú hodnotu 0,0026 mm a absolútnu hodnotu kontaktnej sily možno vypočítať napr. z posunutia  $u_4$  pravej časti

$$|N_c| = \frac{ES}{L} u_4 = \frac{10000}{400} 9,9991 = 249,98 \text{ N}$$

Presnosť výsledkov závisí od veľkosti pokutového parametra  $\alpha$ , pri väčších hodnotách je vyššia a naopak. Pravda, pri jeho extrémnom zvýšení hrozí nestabilita numerickej výpočtovej procedúry.

## Rozšírená Lagrangeova metóda

Metóda v podstate predstavuje iteračnú kombináciu oboch predchádzajúcich metód. Energia pokutového člena v potenciáli sa dopĺňa energiou Lagrangeovho multiplikátora  $\bar{\lambda}$ , kde pruh znamená, že sa pri minimalizácii potenciálu chová ako konštanta (mení sa len v iteračnej procedúre), takže rovnica (25.25) teraz je

$$\mathbf{Ku} - \mathbf{f} + [\bar{\lambda} + \alpha(g - u_3 + u_4)](-\delta u_3 + \delta u_4) = 0 \quad (25.27)$$

a výsledná sústava rovníc pre riešenie analyzovanej úlohy rozšírenou Lagrangeovou metódou je

$$\begin{bmatrix} 2ES/L & -ES/L & 0 \\ -ES/L & ES/L+\alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & ES/L+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \bar{\lambda} + \alpha g \\ -\bar{\lambda} - \alpha g \end{bmatrix} \quad (25.28)$$

Ak v prvom iteračnom kroku zvolíme  $\bar{\lambda}_1 = 0$ , dostaneme, ako vidieť, rovnice pokutovej metódy (25.26). V ďalších iteračných krokoch sa potom príslušné členy na pravej strane rovníc modifikujú Lagrangeovým multiplikátorom, ktorý sa v iteračnej procedúre mení podľa vzťahu

$$\bar{\lambda}_{i+1} = \bar{\lambda}_i + \alpha (g_n)_{i+1} = \bar{\lambda}_i + \alpha (-u_3 + u_4 + g)_{i+1} \quad (25.29)$$

Riešenie rovníc (25.28) s meniacou sa hodnotou  $\bar{\lambda}$  opakuje až po splnenie požadovaných konvergenčných kritérií. Na ich riešenie so zvolenou hodnotou  $\alpha = 1000 \text{ N/m}$  (relatívne malou oproti pokutovej metóde) sme využili program *Mathematica 5*

```
i=1; lambda=0; g=30; alfa=1000;
While[i<5,
A={{50, -25, 0},
  {-25, 25+alfa, -alfa},
  {0, -alfa, 25+alfa}};
b={1500, lambda+alfa*g, -lambda-
alfa*g};
c=particular=LinearSolve[A,b];
Print["i = ", i]Print["lambda = Nc
= ", lambda//N];
Print["u2 = ", c[[1]]//N, " u3 = ",
      c[[2]]//N, " u4 =
", c[[3]]//N];
lambda=lambda+alfa*(g-
c[[2]]+c[[3]]);
i++]
```

s výsledkami

```
i = 1
lambda = Nc = 0.
u2 = 50.0826 u3 = 40.1653 u4 = 9.91736
i = 2
lambda = Nc = -247.934
u2 = 50.0007 u3 = 40.0014 u4 = 9.99932
i = 3
lambda = Nc = -249.983
u2 = 50. u3 = 40. u4 = 9.99999
i = 4
lambda = Nc = -250.
u2 = 50. u3 = 40. u4 = 10.
```

ktoré v poslednom iteračnom kroku už zodpovedajú exaktným hodnotám.



### Príklad 25.1

Riešte uvedený inštruktážny príklad (obr. 25.3) pomocou programu Ansys 12.1. V programe je implicitne nastavené riešenie rozšírenou Lagrangeovou metódou. Vo voľbách (Element type options) pre kontaktný prvok možno zvoliť aj iné, horeopísané metódy.

Príklad sa riešil pomocou týchto príkazov v interaktívnom móde programu:

1. Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Link, 2D spar 1, OK, Close;
2. Real Constants, Add/Edit/Delete, Add, OK, AREA=10, OK, Close;
3. Material Props, Material Models, Favorites, Linear Static, Linear Isotropic, EX=1000, PRXY=0.3, OK, Material, Exit;
4. Modeling, Create, Nodes, In Active CS, X=0, Y=0, Apply, X=400, Y=0, Apply, X=800, Y=0, Apply, X=830, Y=0, Apply, X=1230, Y=0, OK;
5. Modeling, Create, Elements, Auto Numbered, Thru Nodes, Kliknite uzly 1 a 2, Apply, 2 a 3, Apply, 4 a 5, OK;
6. Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Contact, 2D pt-to-pt 178, OK, Close;
7. Real Constants, Add/Edit/Delete, Add, Type2 CONTACT178, OK, FKN=1, OK, Close;
8. Modeling, Create, Elements, Element Attributes, Type=2 CONTACT178, REAL=2, OK, Auto Numbered, Thru Nodes, Kliknite uzly 3 a 4, OK;

1                    1                    2                    2                    344                    3                    5

9. Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Nodes, Kliknite uzol 1 a 5, OK, All DOF, Vyznačte UX a UY, OK;
10. Solution, Define Loads, Apply, Structural, Force/Moment, On Nodes, Kliknite uzol 2, OK, Value=1500, OK;
11. Analysis Type, Sol'n Controls, Time=1, Number of substeps=1, Max. no. of substeps=2, Min. no. of substeps=1, OK;
12. Solution, Curent LS, OK;
13. Výpis posunutí uzlových bodov  
General Postproc, List Results, Nodal Solution, X-Component of displacement, OK;

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX
1	0.0000
2	50.000
3	40.000
4	10.000
5	0.0000

14. Výpis síl v prvkoch

Element Table, Define Table, Add, Lab=Sily, By sequence num, SMISC,1, OK, Close, List Elem Table, Sily, OK;

\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT TABLE LISTING \*\*\*\*\*

STAT	CURRENT
ELEM	SILY
1	1250.0
2	-250.00
3	-250.00
4	-250.00

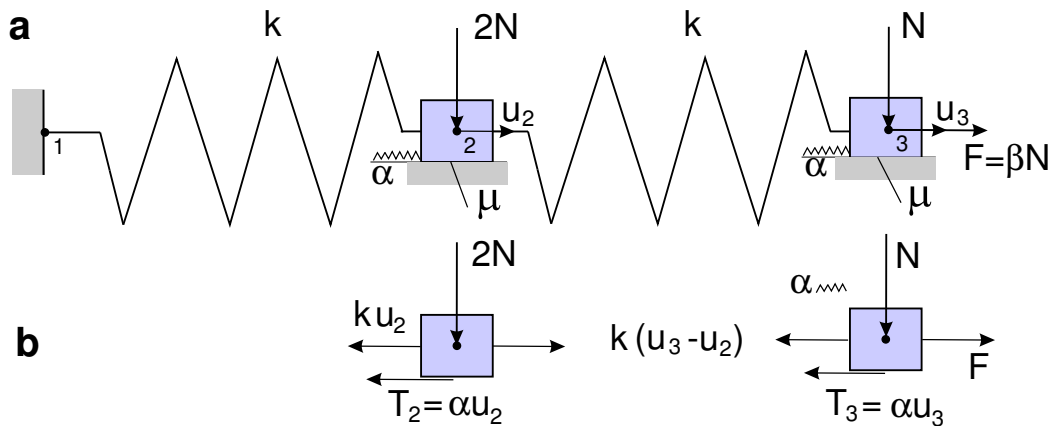
15. File, Exit, OK;

Výsledky súhlasia s horeuvedenými riešeniami.

## Kontakt s trením

Základné pojmy súvisiace s trením pri kontakte možno opäť vysvetliť na jednoduchom príklade uzlového kontaktu. Uvažujme sústavu, ktorá sa skladá z troch uzlov a dvoch pružinových prvkov s rovnakou tuhosťou  $k$  (obr. 25.4a). Uzol 1 je tuho upevnený a v uzle č. 3 pôsobí ťahová sila  $F$ , ktorá je  $\beta$ -násobkom sily  $N$ . Uzly 2 a 3 sú v kontakte s tuhým telesom a sú zaťažené normálovými kontaktnými silami  $2N$  a  $N$ , ktoré kvôli jednoduchosti rovnovážnych rovníc nech sú konštantné. Medzi uzlami a telesom uvažujeme Coulombovo trenie s koeficientom statického šmykového trenia  $\mu$ .

Pri manipulácii s veľkosťou vonkajšej zaťažujúcej sily  $F = \beta N$  pomocou násobku  $\beta$  možno hovoriť o troch fázach reakcie tohto systému na zaťaženie:



Obr. 25.4

1. Úplný príľnutý (*sticking*) kontakt. To znamená, že trenie zabraňuje pohybu oboch uzlov. V tomto prípade tangenciálne sily medzi uzlami a telesom sú reakcie v “upevnenom” uzle.
2. Čiastočne príľnutý a čiastočne klzný (*sliding*) kontakt. V časti uzlov (v tomto príklade v jednom) dôjde k prekĺznutiu, pričom reakčnú silu pri známom koeficiente trenia predstavuje kontaktná trecia sila  $T$ , ktorej veľkosť určuje Coulombov trecí zákon a ostatné (v tomto príklade jeden) zostanú v stave príľnutia.
3. Úplný klzný kontakt, kedy vo všetkých uzloch dochádza k prekĺznutiu a proti pohybu uzlov pôsobia tangenciálne kontaktné trecie sily (obr. 25.4b).

Pri numerickej analýze kontaktných úloh s trením sa využívajú tie isté metódy ako pri úlohách bez trenia, pravda, trenie do výpočtu vnáša komplikáciu v podobe nespojitosti posunutí uzlových bodov. Ukážeme si to na analýze uvedeného príkladu. Na rozlíšenie medzi príľnutím a prekĺznutím uzla využijeme trecí zákon vo forme nerovnosti

$$T \leq \mu N \quad (25.30)$$

a využijeme pokutovú metódu. Pri tejto metóde pokutový parameter  $\alpha$  predstavuje tuhosť pružín, ktoré imitujú trecí silový odpor, vzniknutý v mieste styku uzlov s telesom pri zaťažení systému silou  $F$ .

Rovnice rovnováhy uzlov podľa obr. 25.4b sú

$$-k u_2 + k(u_3 - u_2) - \alpha u_2 = 0 \quad (25.31)$$

$$-k(u_3 - u_2) + F - \alpha u_3 = 0 \quad (25.32)$$

a v maticovom zápise s  $F = \beta N$

$$\begin{bmatrix} 2k + \alpha & -k \\ -k & k + \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta N \end{bmatrix} \quad (25.33)$$

S pokutovým parametrom  $\alpha = 10k$  dostaneme

1. *Úplný príľnutý kontakt.* Pokutová metóda túto situáciu ( $u_2 = u_3 = 0$ ) vystihuje len približne; posunutia príľnutých uzlov sú malé, ale nie nulové. A ako už vieme, presnosť sa zvyšuje so zväčšovaním hodnoty pokutového parametra  $\alpha$ . Z (25.33) máme

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{\beta N}{131k} \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (25.34)$$

2. *Prekĺznutie uzla č.3.* Teraz tangenciálnu silu v tomto mieste udáva trecí zákon a pretože  $u_2 = 0$ , možno určiť násobok sily  $\beta$ , pri ktorom dôjde k tejto situácii

$$T_3 = \mu N = \alpha u_3 = \alpha \frac{12F}{131k} = \frac{120}{131} \beta N \quad \rightarrow \quad \beta > \frac{131}{120} \mu \quad (25.35)$$

Vzhľadom na prekĺznutie uzla č.3 sa rovnice (25.33) zmenia na

$$\begin{bmatrix} 2k + \alpha & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\beta - \mu)N \end{bmatrix} \quad (25.36)$$

a pre posunutia uzlov platí

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{N}{11k} \begin{bmatrix} \beta - \mu \\ 12(\beta - \mu) \end{bmatrix} \quad (25.37)$$

3. *Úplný klzný kontakt.* Druhý uzol sa dostane do sklzu, keď bude platiť

$$T_2 = \alpha u_2 = \alpha \frac{N}{11k} (\beta - \mu) = \frac{10N}{11} (\beta - \mu) > \mu 2N \quad (25.38)$$

takže pri  $\beta > \frac{32}{10} \mu$  v oboch uzloch pôsobia známe tangenciálne trecie sily a posunutia podľa nového systému rovníc sú

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{N}{1k} \begin{bmatrix} \beta - 3\mu \\ 2\beta - 4\mu \end{bmatrix} \quad (25.39)$$

## Problematika formulácie a riešenia všeobecnej kontaktnej úlohy pomocou MKP

Formulácia všeobecnej kontaktnej úlohy predpokladá vzájomný kontakt viacerých telies. Pri konkrétnom numerickom riešení sa telesá postupne spárujú, a preto možno vždy úlohu zredukovať na kontakt dvoch všeobecných priestorových telies. Základné kroky numerickej analýzy takejto úlohy sú

1. Formulácia kinematiky pohybu telies
2. Definovanie konštitutívnych (materiálových) rovníc pre oblasť styku telies, minimalizácia penetrácie, výpočet kontaktných síl.
3. Vytvorenie variačných rovníc úlohy a ich diskretizáciu s využitím špeciálnych kontaktných konečných prvkov na rozhraní styku telies

4. Vzhľadom na nespojitosti vyplývajúce z variačných nerovností vytvorenie špeciálnych algoritmov pre numerický výpočet úlohy

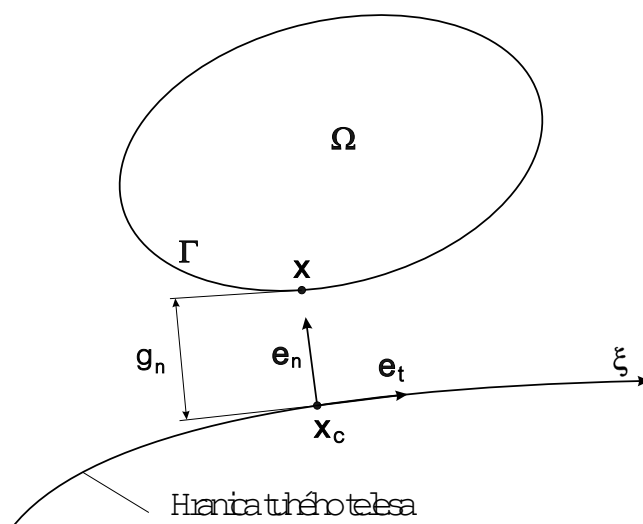
Všeobecná formulácia predpokladá geometrické a fyzikálne nelinearity kontaktujúcich telies, treba ale zdôrazniť, že aj pri ich absencii je úloha nelineárna, pretože kontaktný tlak v mieste styku telies sa pri lineárnom náraste zaťaženia mení nelineárne vzhľadom na zmenu veľkosti plochy kontaktu.

Pre potrebu matematickej formulácie vzdialenosti entít telies a medzerovej funkcie sa obyčajne zavádza rozlíšenie dvojice kontaktujúcich telies, ich styčných plôch a prvkov a tieto pojmy sa potom objavujú aj v manuáloch programov. Rozlišuje sa napr. hlavná (*master, target*) plocha a podriadená (*slave, contact*) plocha. V algoritmoch kinematických vzťahov sa potom pre každý bod podriadenej plochy určuje (v programe počíta) normálová vzdialenosť po hlavnú plochu.

## Podmienky kontaktu

Podmienkami kontaktu sa nazývajú vzťahy, ktoré slúžia na kontrolu, či došlo ku kontaktu bodov hlavnej a podriadenej plochy a charakterizujú prípadný vzniknutý kontakt spárovaných bodov oboch plôch v normálovom i tangenciálnom smere. Pre normálový smer je to podmienka nulovej penetrácie a v tangenciálnom smere podmienka pre prekĺznutie bodov v kontakte.

Obrázok 25.5 udáva veličiny a parametre pomocou ktorých možno vyjadriť tieto podmienky pre dvojrozmerné podriadené teleso v kontakte s dokonale tuhým hlavným telesom.



Obr. 25.5 Parametre podmienky bodového kontaktu

Predpokladajme, že ak dôjde ku kontaktu, tak bod  $\mathbf{x}(x, y)$  kontaktnej hranice  $\Gamma_c$  bude v kontakte s bodom

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_c(\xi_c) \quad (25.40)$$

kde  $\xi_c$  je prirodzená súradnica udávajúca polohu tohto (zatiaľ neznámeho) partnera bodu  $\mathbf{x}$  na hranici tuhého telesa. Jeho nájdenie je prvý krok v iteračnej kontaktnej analýze, pretože treba zistiť, či oba body už sú v kontakte alebo nie. V matematike sa táto operácia

nazýva ortogonálna projekcia alebo nájdenie najbližšieho bodu k bodu  $\mathbf{x}$ . Pokiaľ by bola hranica hlavného telesa rovná čiara, možno tento bod určiť explicitne, v prípade všeobecnej nelineárnej krivky sa musí určovať z nelineárnej rovnice

$$\varphi(\xi_c) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c))^T \mathbf{e}_t(\xi_c) = 0 \quad (25.41)$$

kde  $\mathbf{e}_t = \mathbf{t} / \|\mathbf{t}\|$  je jednotkový tangenciálny vektor a  $\mathbf{t} = \mathbf{x}_{c,\xi} = \partial \mathbf{x}_c / \partial \xi$  je tangenciálny vektor v bode  $\mathbf{x}_c$ . Rovnica (25.41) sa nazýva podmienka kontaktnej konzistencie a umožňuje určiť bod  $\mathbf{x}_c$ .

Len čo je bod kontaktu známy, možno už zistiť, či došlo ku kontaktu, a to určením vzdialenosti oboch bodov. Súčasne možno využitím vzdialenosti  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_c$  predpísať podmienku nepreniknuteľnosti vo forme normálovej medzerovej funkcie

$$g_n = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c))^T \mathbf{e}_n(\xi_c) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (25.42)$$

kde  $\mathbf{e}_n(\xi_c)$  je jednotkový vektor vonkajšej normály k hlavnej ploche v bode kontaktu (obr. 25.5).

Pohyb bodu pozdĺž hranice tuhého telesa ovplyvňuje trecia sila závislá od použitého trecieho zákona. V tomto smere ako miera relatívneho pohybu kontaktného bodu pozdĺž hranice tuhého telesa slúži tangenciálna *slip* funkcia

$$g_t = \|\mathbf{t}^{n-1}\| (\xi_c - \xi_c^{n-1}) \quad (25.43)$$

kde horný index  $n-1$  označuje pre tangenciálny vektor  $\mathbf{t}$  i premennú  $\xi_c$  hodnoty z predchádzajúceho konvergujúceho prírastkového kroku času alebo zaťaženia.

Kontaktná sila vzájomného pôsobenia telies na hranici kontaktu sa rozkladá na normálovú a tangenciálnu zložku

$$\mathbf{f} = \lambda \mathbf{e}_n + t \mathbf{e}_t \quad (25.44)$$

kde  $\lambda$  a  $t$  sú hodnoty týchto zložiek. Potom podmienky pre normálový kontakt sú

$$g_n \geq 0; \quad \lambda \geq 0; \quad g_n \lambda = 0 \quad (25.45)$$

kde posledná podmienka vyjadruje fakt, že ak je  $g_n > 0$ , potom musí byť  $\lambda = 0$  a naopak.

Pri určení podmienky pre tangenciálny kontakt predpokladáme, že pre body na kontaktnej hranici platí Coulombov trecí zákon a  $\mu$  je trecí koeficient. Ďalej zavedme bezrozmernú premennú

$$\tau = \frac{t}{\mu \lambda}; \quad \lambda > 0 \quad (25.46)$$

kde súčin  $\mu \lambda$  vyjadruje veľkosť trecieho odporu v príslušnom stykovom bode telies. Pri stave tangenciálneho pošmyknutia stýkajúcich sa bodov možno ich relatívnu tangenciálnu rýchlosť vyjadriť z ich rýchlostných vektorov

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2] \cdot \mathbf{e}_t \quad (25.47)$$

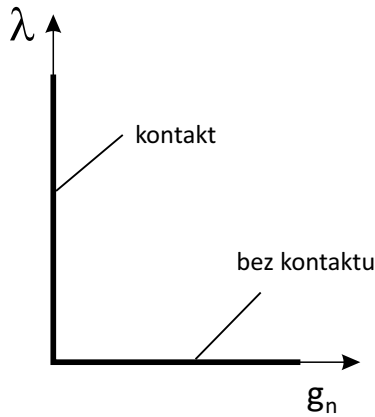
a pre *stick-slip* podmienky platí

$$\tau \leq 1; \quad \tau < 0 \rightarrow \mathbf{v} = 0; \quad \tau = 1 \rightarrow \mathbf{v} \neq 0 \quad (25.48)$$

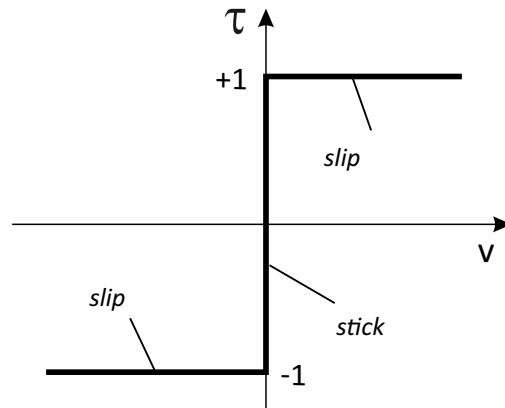
Rýchlosť prekĺznutia sa počíta ako podiel prírastkového preklzovacieho posunutia a časového prírastku. V takejto formulácii potom aj pri statickej analýze s trením čas nie je formálnym parametrom ako pri klasickej nelineárnej statickej úlohe.

Podmienky kontaktu na stykovej hranici telies (25.45) a (25.48) možno jednoducho graficky zobrazíť (obr. 25.6).

normálové podmienky kontaktu



tangenciálne podmienky kontaktu



Obr. 25.6 Grafické zobrazenie podmienok kontaktu

### Príklad 25.1

Hranica 2D tuhého telesa má tvar paraboly s funkciou  $y = x^2$ ,  $x > 0$ . Určte projekčný bod z polohy  $\mathbf{x} = [3, 1]^T$  z rovnice (25.41) a vzdialenosť bodov  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}_c$  z rovnice (25.42).

Vektorová funkcia zadanej paraboly v parametrickom tvare je

$$\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} \xi \\ \xi^2 \end{bmatrix} \quad (25.49)$$

takže pre jednotkový tangenciálny vektor dostávame

$$\mathbf{e}_t = \frac{\partial \mathbf{x}_c / \partial \xi}{\|\partial \mathbf{x}_c / \partial \xi\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4\xi^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2\xi \end{bmatrix} \quad (25.50)$$

a jednotkový normálový vektor je

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_z = \frac{1}{\sqrt{1+4\xi^2}} \begin{bmatrix} 2\xi \\ -1 \end{bmatrix} \quad (25.51)$$

kde  $\mathbf{e}_z = [0 \ 0 \ 1]^T$  je jednotkový vektor kolmý na rovinu, v ktorej leží parabola.

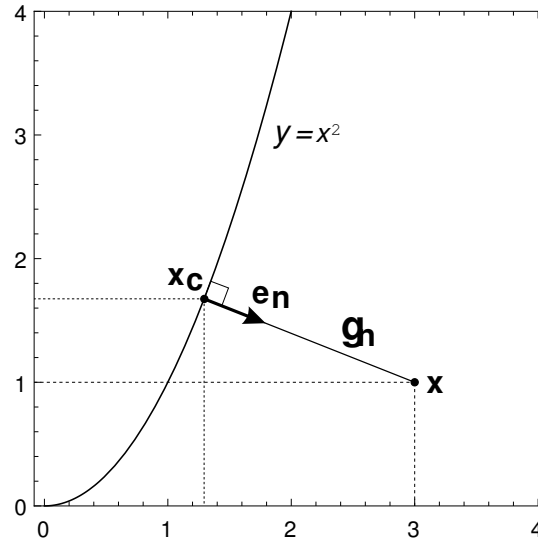
Z rovnice (25.41) možno už určiť súradnice normálovej projekcie bodu  $\mathbf{x}$  na parabolu (t.j. partnerský kontaktný bod), pretože ak má pre  $\mathbf{x} = [3 \ 1]^T$  platiť

$$\varphi(\xi_c) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi))^T \mathbf{e}_t(\xi_c) = \frac{3 + \xi - 2\xi^3}{\sqrt{1+4\xi^2}} = 0 \quad (25.52)$$

potom z nulovej hodnoty čitateľa v tomto vzťahu dostaneme  $\xi_c = 1,29$  a môžeme skompletovať (25.49) na

$$\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} 1,29 \\ 1,66 \end{bmatrix} \quad (25.53)$$

Túto polohu bodu  $\mathbf{x}_c$  potvrdzuje aj grafická kontrola v merítku na obr. 25.7



Obr. 25.7

Vzdialenosť oboch bodov saurčí z medzerovej funkcie (25.42)

$$g_n = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(\xi_c))^T \mathbf{e}_n(\xi_c) = \frac{-\xi_c^2 + 6\xi_c - 1}{\sqrt{1 + 4\xi_c^2}} = 1,83 \quad (25.54)$$

## Formulácia kontaktnej úlohy

Existuje viacero formulácií kontaktnej úlohy deformateľných telies i návrhov spôsobu jej (numerického) riešenia [napr. 1, 2]. V tomto odstavci kvôli názornosti a jednoduchosti uvedieme formuláciu navrhnutú v [1], ktorá využíva špeciálnu väzbovú funkciu (*constraint function*) pri riešení silovej a deformačnej situácie na hranici vzájomného kontaktu uvažovaných telies.

Pre dve telesá, ktoré sú v kontakte v čase  $t$  (obr. 25.7) podľa princípu rovnosti virtuálnej práce vnútorných a vonkajších síl a (25.44) platí

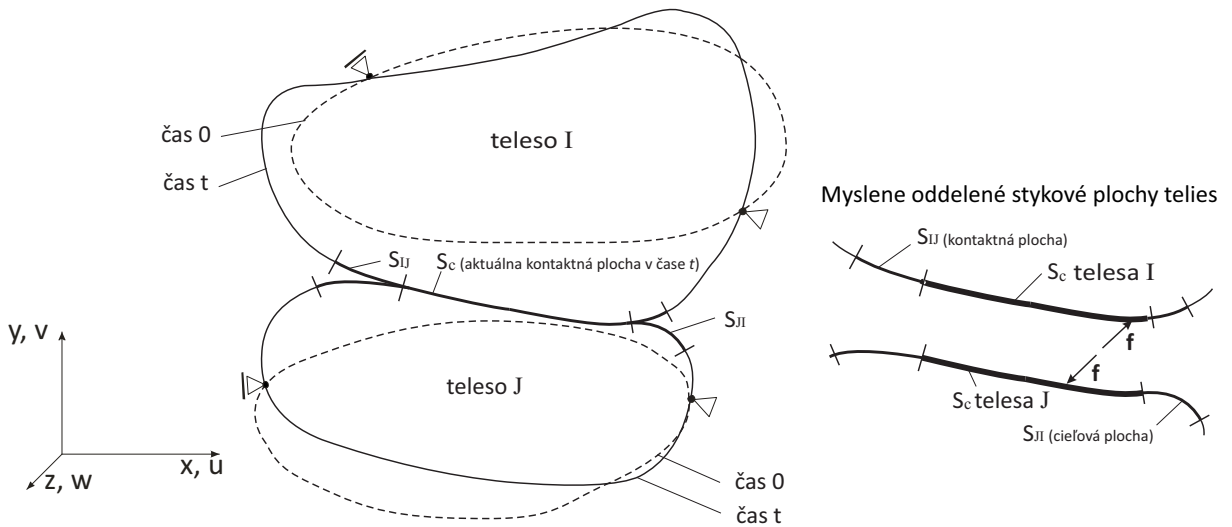
$$\sum_{k=1}^2 \int_{V_0^k} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV^k = \sum_{k=1}^2 \left( \int_{V_0^k} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV^k + \int_{S_0^k} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS^k \right) + \sum_{k=1}^2 \int_{S_c^k} (\lambda \mathbf{n} + \mathbf{t} \mathbf{s}) \cdot \Delta \delta \mathbf{u}^{IJ} dS_c \quad (25.55)$$

kde

$$\delta \mathbf{u}_{IJ} = \delta \mathbf{u}_I - \delta \mathbf{u}_J \quad (25.56)$$

Logika tohto vzťahu je jasná: Jeho ľavá strana a prvý člen na pravej strane predstavujú členy známe z príslušnej zvolenej formulácie úlohy (v tomto prípade totálnej Lagrangeovskej formulácie – pozri 6. kapitolu), kým posledný člen predstavuje príspevok kontaktných síl na

neznámej spoločnej hranici  $S_c$  telies. Na tejto hranici musia byť splnené kontaktné podmienky (25.45) a (25.48).



Obr. 25.7

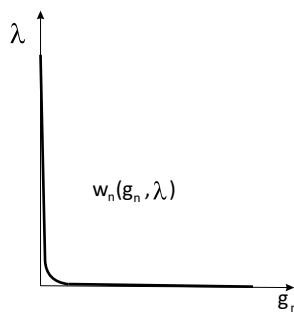
Metóda väzbovej funkcie situáciu na hranici kontaktu rieši tak, že pre podmienky kontaktu v normálovom smere sa zvolí spojitá funkcia  $w(g_n, \lambda)$  tak, že ak  $w(g_n, \lambda) = 0$ , potom sú podmienky (25.45) splnené. Jednou z možností je aproximácia podmienok hyperbolickým vzťahom

$$\lambda g_n = \varepsilon_n \quad (25.57)$$

kde  $\varepsilon_n \ll 1$  (napr.  $\varepsilon_n = 10^{-12}$ ). Funkcia sa upravuje do tvaru

$$w_n(\bar{g}_n, \bar{\lambda}) = \frac{\bar{g}_n + \bar{\lambda}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\bar{g}_n - \bar{\lambda}}{2}\right)^2 + \varepsilon_n} \quad (25.58)$$

s bezrozmernými hodnotami  $\bar{g}_n$  a  $\bar{\lambda}$ . Dostaneme tak spojitú a diferencovateľnú náhradu normálových podmienok kontaktu pre všetky hodnoty  $g_n$  a  $\lambda$  (obr. 25.8).



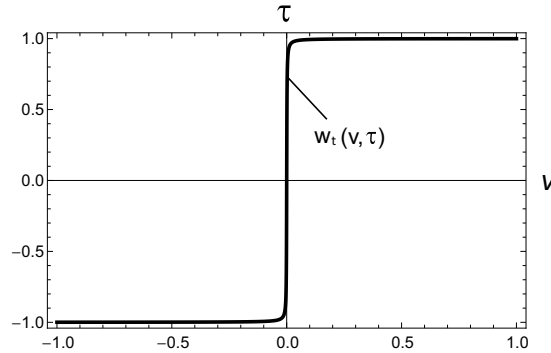
Obr. 25.8

Rovnaký postup sa využíva aj pri zohľadnení tangenciálnych (trecích) podmienok kontaktu. Volí sa taká spojitá a diferencovateľná funkcia  $w_t(v, \tau)$ , že keď  $w_t(v, \tau) = 0$ , tak sú splnené podmienky (25.48). Na jej tvorbu je vhodná funkcia



$$\tau = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{v}{\varepsilon_t} \quad (25.59)$$

kde  $\varepsilon_t \ll 1$ . Pomocou veľkosti tohto parametra možno do určitej miery aj charakterizovať vlastnosti trecieho zákona. Na obr. je znázornená funkcia (25.59) s hodnotou  $\varepsilon_t = 10^{-3}$ .



Obr. 25.9

Nespojité podmienky kontaktu sa uvedeným postupom aproximovali rovnicami

$$w_n(g_n, \lambda) = 0 \quad (25.60)$$

$$w_t(v, \tau) = 0 \quad (25.61)$$

tieto rovnice možno teraz zaviesť do princípu virtuálnej práce využitím napr. metódy Lagrangeových multiplikátorov, ktoré budú predstavovať premenné  $\lambda$  a  $\tau$ . V takom prípade možno dostať rovnicu riadiacu kontakt na hranici telies tak, že vynásobíme (25.60) variáciou  $\delta\lambda$  a (25.61) variáciou  $\delta\tau$  a po sčítaní a integrovaní platí

$$\int_{S_{ij}} [\delta\lambda w_n(g_n, \lambda) + \delta\tau w_t(v, \tau)] dS_{ij} = 0 \quad (25.62)$$

Geometrická a časová diskretizácia rovníc (25.55) a (25.62) poskytne klasickým postupom MKP (podrobnejšie pozri [1]) linearizovanú prírastkovú sústavu rovníc pre numerické riešenie úlohy

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} - \mathbf{f}_c, \quad \mathbf{q}_c = 0 \quad (25.63)$$

kde  $\mathbf{q}$  je vektor vnútorných uzlových síl,  $\mathbf{f}$  vektor vonkajších uzlových síl,  $\mathbf{f}_c$  vektor kontaktných síl,  $\mathbf{q}_c$  vektor kontaktných väzieb vyplývajúci z (25.62) a  $\mathbf{u}$  globálny vektor zovšeobecnených uzlových posunutí. Tento systém nelineárnych rovníc sa prírastkovo rieši pomocou Newton-Raphsonovej metódy a rovnice pre iteračný krok sú

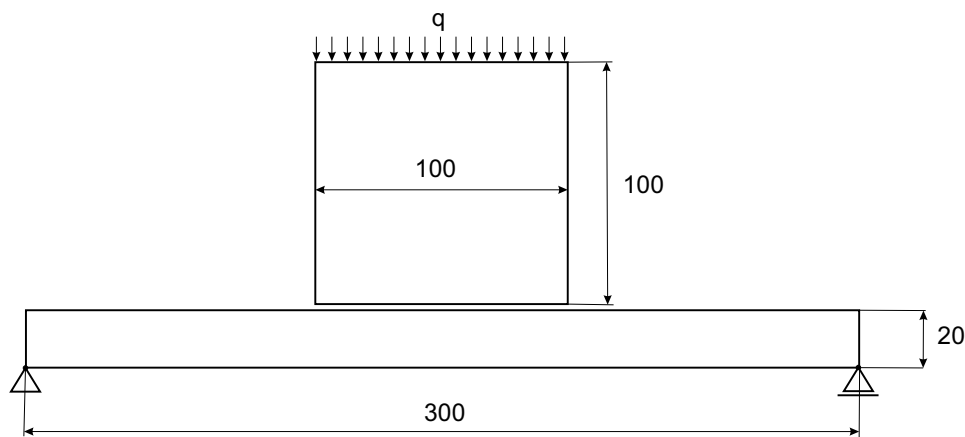
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{f}_c}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{f}_c}{\partial \boldsymbol{\phi}_c} \\ \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \boldsymbol{\phi}_c} \end{bmatrix}^{(i-1)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\phi}_c \end{bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(i)} - \mathbf{q}^{(i-1)} - \mathbf{f}_c^{(i-1)} \\ \mathbf{q}_c^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (25.64)$$

kde vektor  $\boldsymbol{\phi}_c$  obsahuje kontaktné premenné  $\lambda$  a  $\tau$  pre každý uzol, ktorý je v kontakte (t.j. pre ktorý sú splnené podmienky kontaktu).

Na záver treba uviesť, že komerčné programy MKP poskytujú pre riešenie všeobecných kontaktných úloh dostatočne kvalitný komfort na to, aby editácia a riešenie takýchto úloh v podstate neboli výrazne komplikovanejšie ako pri analýze bežných statických alebo nestacionárnych nelineárnych úloh. Postup tvorby modelu i nastavenie nelineárnych riešičov je úplne rovnaké, rozdiel je len v tom, že treba vytvoriť prepojenie kontaktného a cieľového telesa pomocou vhodných kontaktných prvkov. Túto fázu tvorby výpočtového modelu si predstavíme na jednoduchom príklade (čo do prácnosti grafickej editácie) v nasledujúcom príklade v prostredí programu Ansys (verzia 12.1).

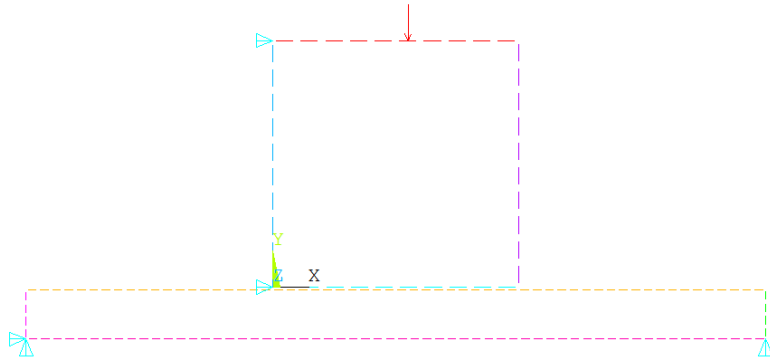
### Príklad 25.1

Štvorcová platňa je položená na krátkom nosníku a jej stredová plocha je zaťažaná čiarovým tlakom  $q = 15 \text{ N/mm}$ . Situácia i rozmery oboch telies jednotkovej hrúbky sú znázornené na obrázku. Materiál oboch telies je rovnaký s hodnotami modulu pružnosti a Poissonovho čísla  $E = 20000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\mu = 0,3$ . Určte maximálny priehyb nosníka.

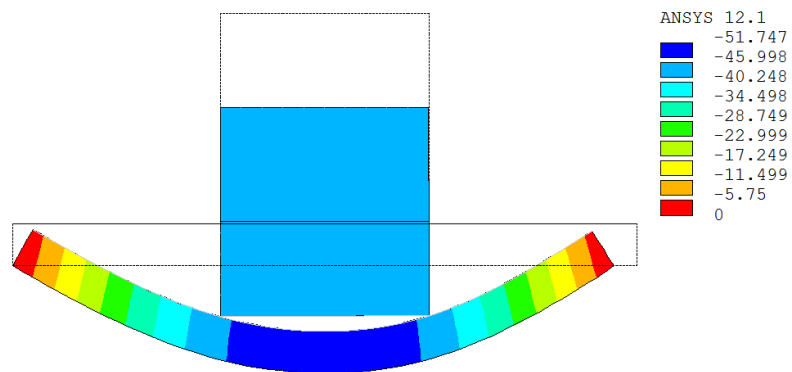


### Postup riešenia

1. Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Quad 8 node 183, OK, Close;
2. Material Props, Material Models, Favorites, Linear Static, Linear Isotropic, EX=20000, PRXY=0.3, OK, Material, Exit;
3. Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1=0, X2=100, Y1=0, Y2=100, Apply, X1=-100, X2=200, Y1= -1, Y2= -21, OK;
4. Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Areas, Picked Areas, Kliknite štvorec, Apply, Size=10, Apply, Kliknite obdĺžnik, OK, Size=5, OK;
5. Meshing, Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;
6. Modeling, Create, Contact Pair, V Contact Manageri kliknite prvú ikonku (Contact Wizard), Pick Target, Kliknite hornú čiaru obdĺžnika, OK, Next, Pick Contact, Kliknite spodnú stranu štvorca, OK, Next, Create, Finish, Zavrite Contact Manager;
7. Element Type, Add/Edit/Delete, CONTA172, Options, K5=Close gap, OK, Close;
8. Plot, Lines;
9. Solution, Define Loads, Apply, Structural, Displacement, On Keypoints, Kliknite spodné rohy obdĺžnika, Apply, Vyznačte UY, Apply, Kliknite ľavý roh obdĺžnika a rohy ľavej strany štvorca, OK, Vyznačte (len) UX, OK;
10. Define Loads, Apply, Pressure, On lines, Kliknite hornú stranu štvorca, OK, Value=15, OK;



11. Analysis Type, Sol'n Controls, Time=1, No. of substeps=20, Max. no. of substeps=40, Min. no. of substeps=5, Analysis Options=Large Displacement Static, OK;
12. Solve, Current LS, OK;
13. General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, DOF Solution, Y-Component of displacement, Scale Factor=True Scale, OK;



14. File, Exit, OK;